חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

ⓒ ארזים

29 בנובמבר 2016

נתקן משהו מהוכחת האי שוויון האיזופרמטרי מהשיעור הקודם. ראינו

$$A=\sqrt{p\left(p-x\right)\left(p-y\right)\left(p-z\right)}$$

ורצינו לגזור. נגדיר

$$g\left(p,x,y,z\right)=\sqrt{p\left(p-x\right)\left(p-y\right)\left(p-z\right)}$$

וזהו A רק כאשר $p=\frac{x+y+z}{2}$. לכן

$$\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial p}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g}{\partial p}+\frac{A}{2\left(p-x\right)}$$

בדומה עבור y,z, ומשם ממשיכים כמו אז.

1 כופלי לגראנז'

ניזכר במשפט.

משפט 1.1 תהי $U\subseteq\mathbb{R}^{n}$, ויהיו $g_{1},\ldots,g_{k}$ פונקציות $C^{1}\left(U,\mathbb{R}\right)$ (האילוצים), ונניח כי $Dg_{1},\ldots,Dg_{k}$ בלתי תלויים לינארית בנקודה x_{0}.

תהי $f\in C^{1}\left(U,\mathbb{R}\right)$ פונקציית המטרה. אזי אם $x_{0}\in U,g_{i}\left(x_{0}\right)=0$ נקודת מינימום או מקסימום של f תחת האילוצים, מתקיים

$$D_{x_{0}}f=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{i}D_{x_{0}}g_{i}$$

עבור λ_{i} כלשהם.

הוכחה: בשלילה. נניח כי המשפט לא מתקיים, כלומר $D_{x_0}f, D_{x_0}g_1, \ldots, D_{x_0}g_k$ בלתי תלויים לינארית. נגדיר

$$\begin{aligned} F : U &\to \mathbb{R}^{k+1} \\ F(x) &= \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \\ f(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

אזי מתקיים

$$D_{x_0}F = \begin{pmatrix} D_{x_0}g_1 \\ D_{x_0}g_2 \\ \vdots \\ D_{x_0}f \end{pmatrix}_{(k+1)\times n}$$

בנקודה x_0 כל אלה בלתי תלויים, מההנה, ולכן $\mathrm{rk}D_{x_0}F = k+1$, מדרגה מקסימלית - לכן לפי משפט הפונקציה הפתוחה, F העתקה פתוחה בנקודה x_0, כלומר לכל סביבה פתוחה U_{x_0}, התמונה שלה $F(U_{x_0})$ היא סביבה של הנקודה $y = F(x_0)$. כמובן, מתקיים

$$F(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} = y_0$$

סביבה של y_0 מכילה בפרט נקודות מהצורה

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x_0)+t \end{pmatrix}, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

כיוון שהמשתנה t יכול להיות שלילי או חיובי, נקבל שבתמונה של F על סביבה של x_0 תמיד יהיו נקודות שהערך בהן של f גדול מאשר $f(x_0)$, ותמיד יהיו נקודות שהערך בהן קטן מאשר $f(x_0)$ - ולכן x_0 לא יכולה להיות מינימום או מקסימום תחת האילוצים, בסתירה. ■

2 קואורדינטות מקומיות

הגדרה 2.1 נניח שיש לנו נקודה x_0 במרחב $\mathbb{R}_n$, שנסמן את הקואורדינטות בו $(x^1, \ldots, x^n)$. נניח כי יש לנו דיפאומורפיזם (העתקה גזירה ברציפות שההופכית שלה גזירה ברציפות) מסביבה כלשהי בעותק אחר של $\mathbb{R}^n$, שבו הקואורדינטות הן $(u^1, \ldots, u^n)$, לסביבה של x_0. במצב זה אומרים כי $(u^1, \ldots, u^n)$ הן קואורדינטות מקומיות של $\mathbb{R}^n$.

דוגמאות ראינו כבר שתיים - קואורדינטות קוטביות של $\mathbb{R}^2$, וספריות של $\mathbb{R}^3$.

במקרה שמתואר בהגדרה, נדון בדיפרנציאל של F. מתקיים כמובן

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial F}{\partial u^n} \end{pmatrix}$$

מטריצה זו נקראת המטריצה של המטריקה הרימאנית.

זו מטריצה הפיכה, כי F דיפאומורפיזם - לכן העמודות האלה הן בלתי תלויות לינארית. כל אחת מהעמודות מייצגת את השינוי של F כאשר הנקודה משתנה רק בקואורדינטה זו - בתמונה, זה יהיה קו עקום, והעמודה תהיה הווקטור המשיק לה בנקודה המסויימת. למעשה, בעותק המקור של $\mathbb{R}^n$, הקואורדינטות $\left(u^1, \dots, u^n\right)$ מאונכות, ומועתקות לעותק השני למסילות כלשהן, לא דווקא קווים ישרים - הנגזרות החלקיות הן המשיקים למסילות הללו.

דוגמא בקואורדינטות קוטביות - אם נריץ את r, והזווית φ לא תזוז, נקבל קווים ישרים שעוברים בראשית. אם נריץ את φ ולא את r, נקבל מעגלים סביב הראשית. לכן הנגזרת לפי r היא קו ישר שעובר דרך הראשית, והנגזרת לפי φ משיקה למעגל המתאים בנקודה המתאימה.

כמובן, הווקטורים $\frac{\partial F}{\partial u^i}$ הם בסיס, ואז ניתן לדבר על הקואורדינטות של ווקטור ξ לפי הבסיס הזה. נגדיר מטריצה

$$\begin{aligned} G(u) &= \left(g_{ij}(u)\right) \\ g_{ij}(u) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right\rangle \end{aligned}$$

זו נקראת מטריצת גרם. מתקיים

$$G = (DF)^T DF$$

דוגמא בקואורדינטות קוטביות:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= (\cos\varphi, \sin\varphi) \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= (-r\sin\varphi, r\cos\varphi) \\ G(u) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

המטריצה G שימושית לחישובי נורמה, למשל:

$$|\xi| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle} = \sqrt{\left\langle \sum \xi_i \frac{\partial F}{\partial u_i}, \sum \xi_j \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle} = \sqrt{\sum_{i,j} \xi_i \xi_j g_{ij}(u)}$$

כמו כן מתקיים

$$\det G = (\det DF)^2$$

הגדרה 2.2 $\left(u^1, \dots, u^n\right)$ ייקראו אורתוגונליות אם $g_{ij} = 0$ לכל $i \neq j$.

3 משפט הדרגה הקבועה

משפט 3.1 תהי

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

כאשר $f(x_0) = y_0$. נניח כי $f \in C^1$. נניח כי $\mathrm{rk} D_x f = k$ לכל x בסביבה מסויימת של x_0. אזי קיימים דיפאומורפיזמים

$$\begin{aligned} \varphi : U_{x_0} &\to U_0 \\ \psi : V_{y_0} &\to V_0 \end{aligned}$$

($U_{x_0} \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של x_0, $V_{y_0} \subseteq \mathbb{R}^m$ סביבה של y_0, $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של הראשית, וכן $V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$) עבורם מתקיים

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\left(u^1, \dots, u^n\right) = \left(u^1, \dots, u^k, 0, \dots, 0\right)$$

הוכחה: נסמן $x = (x_1, \dots, x_n) = (x', x'')$ כאשר $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$, $x' = (x_1, \dots, x_k)$. באותה צורה נכתוב $y = (y_1, \dots, y_n) = (y', y'')$, כאשר y' הוא k הקואורדינטות הראשונות. בלי הגבלת הכלליות, ניתן להניח כי המינור הבסיסי השמאלי העליון של Df הוא הפיך (אחרת נחליף בין הקואורדינטות, ונוכל והחליף חזרה בדיפאומורפיזמים). לכן למעשה מתקיים

$$f(x', x'') = (Q(x', x''), R(x', x''))$$

כאשר $Q(x', x'') \in \mathbb{R}^k, R(x', x'') \in \mathbb{R}^{m-k}$, והמינור הפיך משמע

$$\det\left(\frac{\partial Q}{\partial x'} \neq 0\right)$$

כי הדיפרנציאל נראה כך:

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x'} & \frac{\partial Q}{\partial x''} \\ \frac{\partial R}{\partial x'} & \frac{\partial R}{\partial x''} \end{pmatrix}$$

כעת נגדיר

$$\varphi\left(x',x''\right)=\left(Q\left(x',x''\right)-y_0',x''-x_0''\right)$$

ומתקיים

$$D\varphi=\begin{pmatrix}\frac{\partial Q}{\partial x'} & *\\ 0 & I\end{pmatrix}$$

לכן $D_{x_0}\varphi$ מטריצה הפיכה, ולכן ממשפט הפונקציה ההפוכה φ הוא דיפאומורפיזם בין סביבה U_{x_0} לסביבה U_0 (נשים לב כי $\varphi\left(x_0\right)=0$).
נסמן כעת

$$\varphi^{-1}\left(u',u''\right)=\left(A\left(u',u''\right),B\left(u',u''\right)\right)$$

כאשר $A\left(u',u''\right)\in\mathbb{R}^k,B\left(u',u''\right)\in\mathbb{R}^{n-k}$. כמובן מתקיים

$$\begin{aligned}\varphi\circ\varphi^{-1} &= \mathrm{Id}\\ \varphi\left(A\left(u',u''\right),B\left(u',u''\right)\right) &= \left(u',u''\right)\\ \left(Q\left(A\left(u',u''\right),B\left(u',u''\right)\right)-y_0',B\left(u',u''\right)-x_0''\right) &= \left(u',u''\right)\end{aligned}$$

לכן נקבל כי

$$\begin{aligned}B\left(u',u''\right) &= x_0''+u''\\ Q\left(A\left(u',u''\right),B\left(u',u''\right)\right) &= y_0'+u'\end{aligned}$$

נחשב ונקבל

$$\begin{aligned}f\circ\varphi^{-1}\left(u',u''\right) &= f\left(A\left(u',u''\right),x_0''+u''\right)=\\ &= \left(Q\left(A\left(u',u''\right),x_0''+u''\right),R\left(A\left(u',u''\right),x_0''+u''\right)\right)=\\ &= \left(y_0'+u',\tilde{R}\left(u',u''\right)\right)\end{aligned}$$

כאשר $\tilde{R}$ מסומן לפי מה שהופיע בקואורדינטה השנייה.
כעת נחשב את דרגת הדיפרנציאל של $f\circ\varphi^{-1}$. מצד אחד, הדיפרנציאל של f בעל דרגה k, והדיפרנציאל של φ^{-1} הפיך, כי φ^{-1} דיפאומורפיזם, ולכן גם הדיפרנציאל של $f\circ\varphi^{-1}$ הוא מדרגה k (כפל במטריצה הפיכה לא משנה דרגה). מצד שני, לפי הנוסחה שלמעלה, מקבלים

$$D\left(f\circ\varphi^{-1}\right)=\begin{pmatrix}\mathrm{Id} & 0\\ * & \frac{\partial\tilde{R}}{\partial u''}\end{pmatrix}$$

המטריצה Id בפינה השמאלית העליונה היא ממימד k, ולכן אם $\frac{\partial\tilde{R}}{\partial u''}$ אינו 0, נקבל דרגה שגדולה מאשר k ־ ולכן $\frac{\partial\tilde{R}}{\partial u''}=0$, ולכן $\tilde{R}$ לא תלוי בערך של u'' (לא תמיד נכון, אבל נניח עם עובדים על תחום קמור ־ כדור או משהו כזה ־ אז כן).
קיבלנו

$$f\circ\varphi^{-1}\left(u',u''\right)=\left(y_0'+u',\tilde{R}\left(u'\right)\right)$$

נגדיר

$$\begin{aligned}\psi:\mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^m\\ \psi\left(y',y''\right) &= \left(y'-y_0',y''-\tilde{R}\left(y'-y_0'\right)\right)\end{aligned}$$

ψ דיפאומורפיזם ־ אפשר לבדוק בשתי דרכים: לחשב את הדיפרנציאל ולראות שהוא הפיך, או לחילופין למצוא את ההעתקה ההופכית ולראות שהיא גזירה ברציפות:

$$\begin{aligned}\left(y'-y_0',y''-\tilde{R}\left(y'-y_0'\right)\right) &= \left(z',z''\right)\\ y' &= z'+y_0'\\ y'' &= z''+\tilde{R}\left(y'-y_0'\right)=z''+\tilde{R}\left(z'\right)\end{aligned}$$

תרגיל ־ להוכיח את הפיכות הדיפרנציאל של ψ. כעת, נחשב ונשים לב כי

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\left(u',u''\right)=\psi\left(y_0'+u',\tilde{R}\left(u'\right)\right)=\left(u',0\right)$$

כמו שרצינו. ■

מסקנה 3.2 נניח כי $k=m$ בתנאי המשפט (כאשר $m\geq n$). אזי

$$\psi f\varphi^{-1}\left(u^1,\ldots,u^n\right)=\left(u^1,\ldots,u^m\right)$$

זו היא העתקה פתוחה ־ ולכן משפט הפונקציה הפתוחה נובע מכאן למעשה.