חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

25 בנובמבר 2016

1 שלל אי שוויונים

1.1 תזכורת - אי שוויון יאנג

ניזכר באי שוויון יאנג: כאשר $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, לכל $a, b \geq 0$, מתקיים

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

השוויון מתקיים אם ורק אם $a^p = b^q$.
נמשיך עם עוד אי שוויונים מרתקים ללא ספק.

1.2 אי שוויון הלדר

יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$. אזי עבור $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, מתקיים

$$|\langle x, y \rangle| = ||x||_p \, ||y||_q = \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

כאשר $p = q = 2$, זהו אי שוויון קושי שוורץ. **הוכחה:** ניקח

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{|x_i|}{||x||_p} \\ b_i &= \frac{|y_i|}{||y||_q} \end{aligned}$$

כעת מאי שוויון יאנג:

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{||x||_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{||y||_q^q}$$

על ידי סכימה נקבל

$$\sum a_i b_i \leq \frac{1}{p} \frac{\sum |x_i|^p}{||x||_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum |y_i|^q}{||y||_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

לכן קיבלנו

$$\begin{aligned}\sum \frac{|x_i|}{||x||_p}\frac{|y_i|}{||y||_q} &\leq 1\\ \sum |x_i|\,|y_i| &\leq ||x||_p\,||y||_q\end{aligned}$$

כלומר

$$|\langle x,y\rangle| = \left|\sum x_iy_i\right| \leq \sum |x_i|\,|y_i| \leq 1$$

וסיימנו. ■

1.3 אי שוויון מינקובסקי

זהו למעשה אי שוויון המשולש עבור הנורמה $||\cdot||_p$. **הוכחה:**

$$\begin{aligned}||x+y||_p^p &= \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|x_i+y_i| \leq\\ &\leq \sum |x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} + \sum |y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} \leq\\ &\leq ||x||_p\left(\sum |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + ||y||_p\left(\sum |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

המעבר האחרון הוא משימוש באי שוויון הלדר פעמיים. כעת נשים לב שמתקיים

$$\begin{aligned}\frac{1}{q}+\frac{1}{p} &= 1\\ \frac{1}{q} &= \frac{p-1}{p}\\ p &= (p-1)\,q\\ \frac{p}{q} &= p-1\end{aligned}$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned}||x+y||_p^p &\leq \cdots \leq ||x||_p\,||x+y||_p^{\frac{p}{q}} + ||y||_p\,||x+y||_p^{\frac{p}{q}} =\\ &= \left(||x||_p+||y||_p\right)||x+y||_p^{p-1}\end{aligned}$$

ובסך הכל, לאחר חלוקה,

$$||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

■

1.4 אי שוויון איזופרימטרי

תהי γ מסילה סגורה ופשוטה שאורכה L, ויהי A השטח החסום על ידה. אזי מתקיים

$$4\pi A \leq L^2$$

אם המסילה היא מעגל. אם היא משולש מתקיים

$$12\sqrt{3}A \leq L^2$$

ושוויון אם ורק אם המשולש שווה צלעות. **הוכחה:** נסמן $p = \frac{L}{2}$. מהתיכון מתקיים

$$A = \sqrt{p\left(p-x\right)\left(p-y\right)\left(p-z\right)}$$

במשולש שאורכי צלעותיו הם x, y, z. נרצה למקסם את A כפונקציה של x, y, z, אבל יש אילוץ ־ חייב להתקיים $x + y + z = 2p$.
באופן מסודר, נגדיר

$$A\left(x,y,z\right) = g\left(x,y,z\right)$$

תחום ההגדרה הוא

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x,y,z > 0, x+y > z, x+z > y, y+z > x \right\}$$

הדרישות הן בשביל אי שוויון המשולש. U היא קבוצה פתוחה.
השפה ∂U מורכבת מנקודות בהן אחד מהאי שוויונים הוא שוויון. בכל אחד מהמקרים הללו יתקיים $g\left(\partial U\right) = 0$ (ברור אם $x = 0$ למשל, וכן אם $x = y + z$, כי אז זה קו).
נשים לב שההגבלה $x + y + z = 2p$ משמעותית ־ עבור $h\left(x,y,z\right) = x + y + z$, נקבל כי $h^{-1}\left(2p\right) \cap \overline{U}$ היא קבוצה קומפקטית. כמו כן, g מתאפסת על השפה שלה, ולכן מובטח לנו מהתרגיל (משפט ווירשטראס) כי g מקבלת מקסימום בפנים של U. נסמן נקודה זו בתור $\vec{x_0} = \left(x_0, y_0, z_0\right)$. מתקיים כמובן $Dh = \left(1,1,1\right)$. כמו כן, נחשב ונקבל

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{1}{2A}\left(\frac{1}{2}\left(p-x\right)\left(p-y\right)\left(p-z\right) - p\left(p-y\right)\left(p-z\right)\right) = \\
&= \frac{1}{2A}\left(\frac{1}{2p}A^2 - \frac{A^2}{p-x}\right) = \frac{A}{2}\left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p-x}\right)
\end{aligned}$$

כמובן ששוויונות דומים נכונים עבור $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}$. כעת, ממשפט האילוץ, חייב להתקיים

$$\left(1,1,1\right) = Dh = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}$$

ולכן חייב להתקיים

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p}-\frac{1}{p-z} &= \frac{1}{2p}-\frac{1}{p-y}=\frac{1}{2p}-\frac{1}{p-x} \\ p-z &= p-y=p-x \\ z &= y=x=\frac{L}{3} \end{aligned}$$

כנדרש! $\blacksquare$

כעת, עבור מטריצה A סימטרית, נגדיר $f(x)=\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle$. מהן נקודות הקיצון של f תחת האילוץ $g(x)=|x|^2-1=0$ (כלומר על ספירת היחידה)? מעניין! כל זאת ועוד - בשיעור הבא!