חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

ⓒ ארזים

22 בנובמבר 2016

1 משפט הפונקציה ההפוכה

הגדרה 1.1 תהי $f : U \to V$. f נקראת דיפאומורפיזם אם $f \in C^1$ וכן קיימת $g : U \to V$ המקיימת $g \in C^1$ וכן $g = f^{-1}$.

משפט 1.2 תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, ותהי $f : U \to \mathbb{R}^n$ כך שמתקיים:

1. $f \in C^1 \left(U, \mathbb{R}^n\right)$.
2. קיימת $y_0 \in U$ כך שהדיפרנציאל $D_{y_0} f$ הוא טרנספורמציה לינארית הפיכה - כלומר המטריצה

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} y_0\right)_{i,j}$$

שנקראת מטריצת יעקובי של f, הוא היעקוביאן, היא הפיכה.

אזי קיימת סביבה של הנקודה y_0, שנסמנה U_0, וסביבה של $x_0 = f\left(y_0\right)$, שנסמנה V_0, כך שהצמצום $f : U_0 \to V_0$ היא דיפאומורפיזם - ומתקיים

$$D_x f^{-1} = \left(D_{f^{-1}(x)}\right)^{-1}$$

הוכחה: נוכיח בעזרת משפט הפונקציה הסתומה - נרצה "לפתור" את המשוואה

$$f\left(y\right) = x$$

נגדיר

$$F\left(x, y\right) = x - f\left(y\right)$$

בגלל שהנחנו $f \in C^1$, ברור כי גם $F \in C^1$. כמו כן, מתקיים

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, y\right) = -D_y f$$

הנקודה (x_0,y_0) מקיימת את המשוורה $F(x_0,y_0)=0$, והמטריצה

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} &= -D_y f\\ \frac{\partial F}{\partial x} &= I\end{aligned}$$

הפיכה, ולכן מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה - כלומר קיימים $\varepsilon>0,\delta>0$ ופונקציה g גזירה ברציפות עבורם לכל $(x,y)\in B_{x_0,\delta}\times B_{y_0,\varepsilon}$ מתקיים $F(x,y)=0 \iff g(x)=y$. כמו כן מתקיים

$$D_x g = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)^{-1}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = (D_y f)^{-1}$$

כעת, נגדיר

$$\begin{aligned}V_0 &= B_{x_0,\delta}\\ U_0 &= g(B_{x_0,\delta}) = f^{-1}(B_{x_0,\delta})\end{aligned}$$

כמובן U_0 פתוחה כי f רציפה. קיבלנו פונקציה הופכית g על הסביבות, ומתקיים גם

$$D_x g = D_y f^{-1}$$

■

דוגמאות

1. נגדיר לכל $r>0$:

$$f:\begin{pmatrix}r\\ \varphi\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix}$$

כעת מתקיים

$$\begin{aligned}Df &= \begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}\\ \det Df &= r>0\end{aligned}$$

מתקיים כמובן $f(r,\varphi)=f(r,\varphi+2\pi)$, ולכן f לא חד־חד־ערכית, אבל המשפט מבטיח לנו כי באופן מקומי, f היא דיפאומורפיזם.

2. נגדיר עבור $r>0,\cos\theta\neq 0$

$$f:\begin{pmatrix}r\\ \varphi\\ \theta\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}r\cos\theta\cos\varphi\\ r\cos\theta\sin\varphi\\ r\sin\theta\end{pmatrix}$$

כעת מתקיים

$$
\begin{aligned}
Df &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix} \\
\det Df &= \sin\theta\cdot r^2\left(\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi+\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\right)+r\cos\theta\cdot r\left(\cos^2\theta\cos^2\varphi+\cos^2\theta\sin^2\varphi\right)= \\
&= r^2\sin^2\theta\cos\theta+r^2\cos^3\theta=r^2\cos\theta\neq 0
\end{aligned}
$$

לכן מהמשפט, באופן מקומי, f היא דיפאומורפיזם.

הערה 1.3 אם f מקיימת את תנאי משפט הפונקציה ההפוכה, מקבלים כי אם W סביבה פתוחה של x_0, אזי גם $f\left(W\right)$ פתוחה.

2 משפט הפונקציה הפתוחה

הגדרה 2.1 תהי $f:X\to Y$.

1. f נקראת העתקה פתוחה אם לכל $U\subseteq X$ פתוחה הקבוצה $f\left(U\right)\subseteq Y$ פתוחה.
2. f נקראת פתוחה בנקודה x_0 אם לכל סביבה פתוחה U של x_0 הקבוצה $f\left(U\right)$ היא סביבה של $f\left(x_0\right)$.

תרגיל אם $f:X\to Y$, אזי f פתוחה אם ורק אם f פתוחה בכל נקודה $x_0\in X$.

תרגיל $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונטונית ורציפה. האם f פתוחה? האם כל f פתוחה היא כזאת?

מסקנה 2.2 אם f מקיימת את משפט הפונקציה ההפוכה, אזי $f:U_0\to V_0$, הצמצום שמדובר עליו במשפט, היא העתקה פתוחה.

משפט 2.3 (משפט הפונקציה הפתוחה) תהי $U\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ פתוחה, ותהי $F:U\to\mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות. נניח כי $D_{(x_0,y_0)}F:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^m$ טרספורמציה לינארית מדרגה מקסימלית (כלומר על). אזי F פתוחה בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$.

הוכחה:

$$D_{(x_0,y_0)}F=\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\end{pmatrix}\left(x_0,y_0\right)$$

קיים מינור כלשהו של המטריצה בגודל $m\times m$ בעל דטרמיננטה שאינה 0. בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח כי המינור הזה הוא $\frac{\partial F}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)$ - כלומר זהו מינור הפיך. כעת, נגדיר פונקציה

$$f\left(y\right)=F\left(x_0,y\right)$$

כמובן מתקיים

$$D_{y_0} f = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

וזו העתקה לינארית הפיכה. לכן f מקיימת את תנאי משפט הפונקציה ההפוכה. אם כן, f היא העתקה פתוחה בנקודה y_0. צריך לבדוק כי F פתוחה בנקודה (x_0, y_0).

תהי U_0 סביבה פתוחה של (x_0, y_0). נגדיר

$$\hat{U}_0 = U_0 \cap \{x = x_0\}$$

זוהי סביבה פתוחה של y_0 במרחב $\{x = x_0\}$. לפי מסקנה שראינו, $f\left(\hat{U}_0\right)$ מכילה סביבה של $F(x_0, y_0) = f(y_0)$. בנוסף מתקיים

$$F(U_0) \supseteq F\left(\hat{U}_0\right) = f\left(\hat{U}_0\right)$$

ולכן F פתוחה. ■

מסקנה 2.4 אם ידוע כי $D_{(x,y)}F$ בעל דרגה מקסימלית לכל (x, y), אזי F העתקה פתוחה.

3 נקודות קיצון תחת אילוצים

נניח כי נתונות $g_1, \ldots, g_k \in C^1(U, \mathbb{R})$, ופונקציית מטרה f. אנחנו נרצה למצוא מקסימום או מינימום מקומי x_0 של f בין כל הנקודות המקיימות

$$S = \begin{cases} g_1(x) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x) = 0 \end{cases}$$

הגדרה 3.1 f בעלת מקסימום מקומי בנקודה $x_0 \in S$ אם לכל x בסביבה פתוחה מסויימת U של x_0 עבורו מתקיים $x \in U \cap S$, מתקיים

$$f(x) \leq f(x_0)$$

3.1 כופלי לגראנז'

משפט 3.2 יהיו $f, g_1, \ldots, g_k \in C^1(U, \mathbb{R})$. נניח כי $x_0 \in S = \{x \mid \forall 1 \leq i \leq k \;\; g_i(x) = 0\}$, ונניח כי $\nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_k(x_0)$ הם בלתי תלויים לינארית. אם לפונקציה יש מקסימום או מינימום מקומי בנקודה x_0 אזי

$$D_{x_0} f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x_0)$$

והמקדמים λ_i נקראים כופלי לגראנז'.

את ההוכחה נראה בשיעור הבא.

דוגמא אי שוויון יאנג: יהיו $a \geq 0, b \geq 0$, ויהיו $1 < p, q < \infty$ כך שמתקיים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
אזי מתקיים $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, והשוויון מתקיים אם ורק אם $a^p = b^q$.
נגדיר $f(a,b) = ab$, ואת האילוץ $\frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q} = c$. בקצוות נקבל $f = 0$, ולכן יש בתחום מקסימום מקומי. כעת, $Df = (b,a), Dg = \left(a^{p-1}, b^{q-1}\right)$, ונקבל לפי המשפט כי $a^p = b^q$.