חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

ⓒ ארזים

25 בנובמבר 2016

1 משפט הפונקציה הסתומה - המשך

בהרצאה הקודמת עבדנו על הוכחת משפט הפונקציה הסתומה. נשאר להראות כי הפונקציה הסתומה f מקיימת $f \in C^1\left(B_{x_0,\delta},\mathbb{R}^m\right)$. בשביל זה עוד יש להראות שהיא גזירה, וכמסקנה מכך נקבל

$$D_x f = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,f\left(x\right)\right)\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}\left(x,f\left(x\right)\right)$$

עד כה בחרנו ε,δ כך שמתקיים

$$\left|\left|I-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,y\right)\right|\right| < \cdots \leq q < 1$$

סימנו

$$M = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)\right)^{-1}$$

וכעת נסמן גם

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\partial F}{\partial y}\left(x,f\left(x\right)\right)\\ X &= \frac{\partial F}{\partial x}\left(x,f\left(x\right)\right)\end{aligned}$$

כעת, נקבל כי MY הפיכה, לפי הלמה הבאה:

למה 1.1 תהי A מטריצה כך שמתקיים $||I-A||<1$. אזי A הפיכה.

הוכחה: נוכיח בשתי דרכים.
דרך 1: ניסוח שקול ללמה: אם $||B||<1$ אזי $I-B$ הפיכה (שקול ללמה על ידי ההצבה $A=I-B$). כעת נניח בשלילה כי $I-B$ אינה הפיכה, כלומר קיים $\xi\neq 0$ עבורו מתקיים

$$\begin{aligned} \left(I-B\right)\xi &= 0\\ \xi &= B\xi\end{aligned}$$

נבחר ξ עם $||\xi|| = 1$ על ידי נרמול, ונקבל

$$||B|| = \max_{||x||=1} |Bx| \geq |I\xi| = ||\xi|| = 1$$

בסתירה להנחה. לכן $I - B$ הפיכה.

דרך 2: נציג מפורשות את ההופכית. היינו רוצים לומר שההופכית היא סכום הטור האינסופי של המטריצות:

$$\sum_{i=0}^{\infty} B^i$$

אבל יש להוכיח שסכום זה מתכנס קודם, על ידי מבחן קושי. ואכן

$$\left|\left|B^m + \cdots + B^{m+p}\right|\right| \leq ||B^m|| + \cdots + \left|\left|B^{m+p}\right|\right| \leq ||B||^m + \cdots + ||B||^{m+p} < \varepsilon$$

אי השוויון הראשון הוא מאי שוויון המשולש, השני הוא מתת כפליות הנורמה, והשלישי הוא משום שכבר מדובר בטור הנדסי מתכנס של מספרים ($||B|| < 1$). נותר רק לבדוק שהמטריצה

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} B^i$$

היא אכן ההופכית של $I - B$, ואכן ברור מפתיחת הסוגריים

$$(I - B)\, A = I$$

■

מהלמה MY הפיכה, וגם M הפיכה.

כעת נשוב להוכחת המשפט.

הוכחה: נרצה להוכיח שהפונקציה הסתומה f דיפרנציאבילית בנקודה x_1. נסמן $y = f\left(x_1\right)$. נרצה להראות שהדיפרנציאל הוא

$$L = -Y^{-1}X$$

כשאת Y, X הגדרנו קודם. מתקיים

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - f\left(x_1\right) - L\left(x - x_1\right)\right| &= \left|f(x) - f\left(x_1\right) + Y^{-1}X\left(x - x_1\right)\right| = \\
&= \left|Y^{-1}\left(Y\left(f(x) - f\left(x_1\right)\right) + X\left(x - x_1\right)\right)\right| = \\
&= \left|Y^{-1}\left(-Y\left(f(x) - f\left(x_1\right)\right) - X\left(x - x_1\right)\right)\right| = \\
&= \left|Y^{-1}\left(F\left(x, f(x)\right) - F\left(x_1, f\left(x_1\right)\right) - Y\left(f(x) - f\left(x_1\right)\right) - X\left(x - x_1\right)\right)\right|
\end{aligned}$$

המעבר האחרון היה חוקי משום שמתקיים $F\left(x,f\left(x\right)\right)=F\left(x_{1},f\left(x_{1}\right)\right)=0$, שכן כך הוגדרה הפונקציה הסתומה בסביבה. כעת, כיוון שנתון כי F גזירה בנקודה $\left(x_{0},y_{0}\right)$ מתקיים

$$F\left(x,y\right)-F\left(x_{1},y_{1}\right)-D_{\left(x_{1},y_{1}\right)}F\begin{pmatrix}x-x_{1}\\y-y_{1}\end{pmatrix}_{m+n}=\left(\left|x-x_{1}\right|+\left|y-y_{1}\right|\right)\cdot\alpha\left(x,y\right)$$

כאשר $0\xrightarrow{\left(x,y\right)\to\left(x_{1},y_{1}\right)}\alpha\left(x,y\right)$, וכן

$$D_{\left(x,y\right)}F=\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\end{pmatrix}_{m\times m+n}$$

לכן נקבל כי

$$F\left(x,y\right)-F\left(x_{1},y_{1}\right)-D_{\left(x_{1},y_{1}\right)}F\begin{pmatrix}x-x_{1}\\y-y_{1}\end{pmatrix}_{m+n}=F\left(x,y\right)-F\left(x_{1},y_{1}\right)-X\left(x-x_{1}\right)-Y\left(y-y_{1}\right)$$

ובסך הכל, אם נחזור לחישוב הקודם,

$$\begin{aligned}\left|f\left(x\right)-f\left(x_{1}\right)-L\left(x-x_{1}\right)\right| &= \cdots= \\ &= \left|Y^{-1}\left(F\left(x,f\left(x\right)\right)-F\left(x_{1},f\left(x_{1}\right)\right)-Y\left(f\left(x\right)-f\left(x_{1}\right)\right)-X\left(x-x_{1}\right)\right)\right|\leq \\ &\leq \left|\left|Y^{-1}\right|\right|\left|F\left(x,f\left(x\right)\right)-F\left(x_{1},f\left(x_{1}\right)\right)-Y\left(f\left(x\right)-f\left(x_{1}\right)\right)-X\left(x-x_{1}\right)\right|= \\ &= \left|\left|Y^{-1}\right|\right|\left(\left|x-x_{1}\right|+\left|f\left(x\right)-f\left(x_{1}\right)\right|\right)\alpha\left(x,f\left(x\right)\right)\end{aligned}$$

כאשר שוב $0\xrightarrow{\left(x,f\left(x\right)\right)\to\left(x_{1},f\left(x_{1}\right)\right)}\alpha\left(x,f\left(x\right)\right)$. כעת, ניקח a כלשהו עבורו

$$\begin{aligned}\left|f\left(x\right)-f\left(x_{1}\right)\right| &\leq \left|f\left(x\right)-f\left(x_{1}\right)-L\left(x-x_{1}\right)\right|+\left|L\left(x-x_{1}\right)\right|\leq \\ &\leq \left|f\left(x\right)-f\left(x_{1}\right)-L\left(x-x_{1}\right)\right|+a\left|x-x_{1}\right|\end{aligned}$$

נציב זאת בחישוב הקודם, ונקבל בסך הכל:

$$\left|f\left(x\right)-f\left(x_{1}\right)-L\left(x-x_{1}\right)\right|\leq b\left(\left|x-x_{1}\right|+\left|f\left(x\right)-f\left(x_{1}\right)-L\left(x-x_{1}\right)\right|+a\left|x-x_{1}\right|\right)\alpha\left(x,f\left(x\right)\right)$$

על ידי העברת אגפים וחילוק נקבל

$$\left|f\left(x\right)-f\left(x_{1}\right)-L\left(x-x_{1}\right)\right|\leq\frac{\left|x-x_{1}\right|\cdot b\left(a+1\right)\cdot\alpha\left(x,f\left(x\right)\right)}{1-b\cdot\alpha\left(x,f\left(x\right)\right)}\xrightarrow{x\to x_{1}}0$$

ולכן f אכן דיפרנציאבילית. נותר רק לבדוק את רציפות הדיפרנציאל הזה. ראינו כבר כי

$$D_{x}f=-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,f\left(x\right)\right)\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}\left(x,f\left(x\right)\right)$$

נתון לנו כי $\frac{\partial F}{\partial x}\left(x,f\left(x\right)\right)$ רציף, וכי $\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,f\left(x\right)\right)$ רציף. נותר רק להראות כי ההעתקה $A\to A^{-1}$ רציפה. למעשה היא גזירה אינסוף פעמים - מתקיים

$$A^{-1}=\frac{\hat{A}}{\det A}$$

כאשר $\det A$ היא פולינום בכניסות המטריצה, וכל כניסה במטריצה $\hat{A}$ היא דטרמיננטה של מינור של A, ולכן גם כן פולינום בכניסות A. ■