חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

17 בינואר 2017

1 משפט מרכז המאסה של פאפוס

נעבוד עם קואורדינטות גליליות: $(x,y,z) \leftrightarrow (r,\varphi,z)$, כאשר (r,φ) הן קואורדינטות פולריות במישור xy. ניקח גוף Ω במישור rz, ונסמן $\hat{\Omega}$ את הגוף המתקבל מסיבוב Ω סביב ציר z. אזי

$$\mathrm{Vol}\left(\hat{\Omega}\right) = \int\limits_{\hat{\Omega}} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_{\Omega} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z\right)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi\frac{\int\limits_{\Omega} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z}{\mathrm{Vol}\left(\Omega\right)}\mathrm{Vol}\left(\Omega\right) = 2\pi R_0 \mathrm{Vol}\left(\Omega\right)$$

כאשר R_0 היא קואורדינטת r של מרכז המסה של Ω.

2 אינטגרל לא אמיתי

נרצה לתת משמעות לגודל $\int\limits_{\Omega} f$ כאשר f לא בהכרח אינטגרבילית (למשל לא חסומה), או שהתחום לא בהכרח מדיד ז'ורדן (למשל לא חסום).

הגדרה 2.1 יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. תהי $f:\Omega\to\mathbb{R}$ פונקציה. נסמן $\{\Omega_m\}$ מיצוי של Ω על ידי תחומים מדידים ז'ורדן. נניח כי f אינטגרבילית על Ω_m, לכל m. אם קיים

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{\Omega_m} f$$

אזי הגבול נקרא אינטגרל לא אמיתי - בתנאי שאינו תלוי בבחירת המיצוי Ω_m.

דוגמאות

.1

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

וניתן לבדוק כי זה נכון לכל מיצוי.

.2

$$\int_{-R}^{R} x\,\mathrm{d}x = 0$$
$$\int_{-R}^{2R} x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_{-R}^{2R} = \frac{3R^2}{2}$$

ולכן לא קיים האינטגרל הלא אמיתי.

משפט 2.2 אם Ω מדידה ז'ורדן וכן f אינטגרבילית על Ω, אזי לכל מיצוי Ω_m על ידיד קבוצות פתוחות ומדידות ז'ורדן מתקיים

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega_m} f = \int_{\Omega} f$$

הוכחה: ברור כי

$$\int_{\Omega} f - \int_{\Omega_m} f = \int_{\Omega\backslash\Omega_m} f$$

נשים לב כי f חסומה על Ω. כמו כן, $\mathrm{Vol}\left(\Omega\backslash\Omega_m\right)\to 0$, לפי למה מהשיעור שעבר. לכן

$$\left|\int_{\Omega} f - \int_{\Omega_m} f\right| = \left|\int_{\Omega\backslash\Omega_m} f\right| < C\mathrm{Vol}\left(\Omega\backslash\Omega_m\right)\to 0$$

■

משפט 2.3 תהי $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $f\geq 0$. יהיו Ω_m,Ω'_k שני מיצויים של Ω על ידי קבוצות פתוחות ומדידות ז'ורדן. נניח כי

$$A = \lim_{m\to\infty}\int_{\Omega_m} f$$
$$B = \lim_{k\to\infty}\int_{\Omega'_k} f$$

אזי בהכרח $A=B$.

הוכחה: נקבע k. כעת, $\Omega_m \cap \Omega'_k$ הוא מיצוי של Ω'_k. לכן

$$\int\limits_{\Omega'_k} f = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega_m\cap\Omega'_k} f \le \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega_m} f = A$$

לכן נקבל כי גם

$$B = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega'_k} f \le \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega_m} f = A$$

באותה צורה בדיוק מראים כי $A \le B$, ומקבלים שוויון. ■

דוגמא נחשב

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2} \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

ניקח $\Omega_m = \{x \mid |x_i| < m\}$ מיצוי של $\mathbb{R}^n$ על ידי קוביות. נקבל

$$\int\limits_{\Omega_m} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2} \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \prod_{i=1}^{n} \int\limits_{-m}^{m} e^{-\lambda_i x_i^2} \,\mathrm{d}x_i$$

כעת

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega_m} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2} \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \prod_{i=1}^{n} \lim_{m\to\infty} \int\limits_{-m}^{m} e^{-\lambda_i x_i^2} \,\mathrm{d}x_i = \prod_{i=1}^{m} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n}}$$

כעת נחשב

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x\rangle} \,\mathrm{d}x$$

כאשר A מטריצה סימטרית ומוגדרת חיובית. כמובן,

$$\langle Ax, x\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j} x_i x_j$$

לפני רגע התעסקנו על מטריצה אלכסונית, עם אלכסון $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. כעת נכליל. נראה שמתקיים

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x\rangle} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}$$

נוכל ללכסן אורתוגונלית את A, כלומר נוכל לבצע החלפת משתנים $x = Ry$, כאשר R מטריצה אורתוגונלית. בקואורדינטות y, המטריצה תהיה אלכסונית, וכן $\det R = 1$, ולכן

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i y_i}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1\cdots\lambda_n}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}$$

משפט 2.4 יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. תהי $f : \Omega \to \mathbb{R}$, ונניח שמתקיים אי שוויון $|f(x)| \leq g(x)$ לכל $x \in \Omega$, וכן כי $\int\limits_{\Omega} g$ קיים. אזי, אם $\int\limits_{\Omega_m} f$ קיים אזי קיים הגבול

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega_m} f$$

והוא אינו תלוי במיצוי Ω_m.

הוכחה: יהי Ω_m מיצוי על ידי קבוצות מדידות ז'ורדן. מניחים כי $\int\limits_{\Omega_m} f$ קיים, ולכן גם $\int\limits_{\Omega_m} |f|$ קיים. אזי

$$\int\limits_{\Omega_m} |f| - \int\limits_{\Omega_k} |f| = \int\limits_{\Omega_m\setminus\Omega_k} |f| \leq \int\limits_{\Omega_m\setminus\Omega_k} |g| = \int\limits_{\Omega_m} g - \int\limits_{\Omega_k} g$$

האינטגרל $\int\limits_{\Omega} g$ מתכנס, ולכן נקבל כי אגף ימין קטן כרצוננו עבור m, k גדולים מספיק. לכן גם $\int\limits_{\Omega} |f|$ מתכנס - ולא תלוי במיצוי בגלל שהפונקציה $|f|$ אי שלילית. כעת, נגדיר

$$\begin{aligned} f_+ &= \max(f(x), 0) \\ f_- &= \max(-f(x), 0) \end{aligned}$$

ואז מתקיים

$$\begin{aligned} f &= f_+ - f_- \\ |f| &= f_+ + f_- \end{aligned}$$

מתקיים

$$0 \leq f_+, f_- \leq |f| \leq g$$

ולכן האינטגרלים שלהן מתכנסים - כלומר גם האינטגרל של f. ■

דוגמא בהרבה מקרים משווים עם פונקציה $g(x)=|x|^{-\alpha}$, עבור $\alpha>0$. הנקודות הבעייתיות שלה הן $x=0,\infty$.
נחלק לשני תחומים: $\Omega=B$, כדור היחידה של $\mathbb{R}^n$, וכן $\Omega=\mathbb{R}^n\backslash B$. רוצים לדעת האם

$$\int\limits_{\Omega} g$$

קיים. אנחנו נעבוד ראשית עם המקרה הראשון - $\Omega=B$. ניקח ניצוי:

$$\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}\hat{\Omega}_k$$
$$\Omega_k=\left\{2^{-k}\le|x|\le 2^{1-k}\right\}$$
$$\hat{\Omega}_k=\bigcup_{i=1}^{k}\Omega_m$$

זה מיצוי על ידי קבוצות מדידות ז'ורדן. כעת,

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_m} g=\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\Omega_i} g$$

מתקיים בתוך Ω_i

$$2^{-k}\le|x|\le 2^{1-k}$$
$$2^{(k-1)\alpha}\le g(x)=|x|^{-\alpha}\le 2^{k\alpha}$$

כמו כן,

$$\mathrm{Vol}(\Omega_k)=\kappa_n\left(2^{(1-k)n}-2^{-kn}\right)=\kappa_n\left(2^n-1\right)2^{-kn}$$

לכן, למעשה מתקיים

$$\kappa_n\left(2^n-1\right)2^{(k-1)\alpha}2^{-kn}\le\int\limits_{\Omega_k} g\le\kappa_n\left(2^n-1\right)2^{-kn}2^{k\alpha}$$
$$C_2 2^{k(\alpha-n)}\le\int\limits_{\Omega_k} g\le C_1 2^{k(\alpha-n)}$$

כעת

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_k} g=\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\Omega_i} g$$

לכן כדי להוכיח קיום של האינטגרל, נשווה עם הטור הבא, שחוסם מלמעלה את גבול האינטגרלים:

$$C_1 \sum 2^{k(\alpha-n)}$$

כדי להוכיח אי קיום, משווים עם הטור הבא, שחוסם מלמטה את גבול האינטגרלים:

$$C_2 \sum 2^{k(\alpha-n)}$$

הטורים הללו מתכנסים אם ורק אם $\alpha < n$. לכן גם האינטגרל מתכנס במצב זה בלבד.