חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

ארזים ©

22 בינואר 2017

אנחנו ממשיכים לנסות לחשב את $\int e^{-x^2}$. נגדיר $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$. ראינו בשיעור שעבר כי

$$\int_{B_R} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\left(1-e^{-R^2}\right)$$

בעזרת החלפת משתנים לקואורדינטות פולריות. אם ניקח את הגבול כאשר $R\to\infty$ נקבל כי

$$\lim_{R\to\infty}\int_{B_R} f=\pi$$

ולזה יהיה משמעות בהמשך כשנדבר על אינטגרל לא אמיתי.
נמשיך: מתקיים

$$B_R\subseteq C_R\subseteq B_{2R}$$

כאשר C_R היא קוביה בעלת אורך צלע R. ניקח גבול ונקבל כי

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f=\pi$$

אזי מתקיים

$$\int_{-R}^{R}\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_{C_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

שוב ניקח גבול ונקבל כי

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$$

מהחלפת משתנים נקבל כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

1 מרכז מסה

בהינתן וקטורים עם כיוונים $\vec{r_1},\vec{r_2},\ldots$ ומשקלים $m_1,m_2,\ldots$, נגדיר את מרכז המסה שלהם

$$R = \frac{\sum_i m_i\vec{r_i}}{\sum_i m_i}$$

תהי $\rho\left(x\right)$ פונקציית צפיפות אי שלילית, ותהי Ω קבוצה מדידה ז'ורדן. הדוגמה הרגילה היא $\rho\left(x\right)=1$ - המסה היא בדיוק $\mathrm{Vol}\left(\Omega\right)$. נגדיר שוב מרכז מסה, הפעם על קבוצה:

$$R = \frac{\int_\Omega \vec{x}\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x}{\int_\Omega \rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x}$$

טענה 1.1 תהי A הפיכה, וניקח טרנספורמליה אפינית $x\to Ax+b$. אז היא מעבירה מרכז מסה למרכז מסה.

הוכחה: נסמן $\vec{y}=A\vec{x}+b$. אזי

$$\begin{aligned}\frac{\int \vec{y}\rho\left(y\right)\,\mathrm{d}y}{\int \rho\left(y\right)\,\mathrm{d}y} &= \frac{\int \left(A\vec{x}+b\right)\rho\left(x\right)\left|A\right|\,\mathrm{d}x}{\int \rho\left(x\right)\left|A\right|\,\mathrm{d}x} = \frac{\int \left(A\vec{x}+b\right)\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x}{\int \rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x} = \\ &= \frac{\int A\vec{x}\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x + \int b\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x}{\int \rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x} = A\left(\frac{\int \vec{x}\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x}{\int \rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x}\right)+b\end{aligned}$$

■

דוגמא עבור $\rho\left(x\right)=1$, מרכז המסה של משולש מלא עם הפנים שלו נמצא במרכז המשולש. ההוכחה לא מסובכת וחישובית מאוד.