חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

10 בינואר 2017

אנחנו נמצאים בעיצומה של הוכחת משפט החלפת המשתנים: אם $U,V\subseteq\mathbb{R}^n$ תחומים, כשבתוך U הקואורדינטות הן $x_1,\ldots,x_n$ ובתוך V הן $y_1,\ldots,y_n$, $\Omega\subseteq\overline{\Omega}\subseteq V$ קבוצה מדידה ז'ורדן, $f:V\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית על Ω, ודיפאומורפיזם $\varphi:U\to V$, אזי

$$\int\limits_{\Omega} f=\int\limits_{\varphi^{-1}(\Omega)}(f\circ\varphi)\left|\det\varphi'\right|$$

הוכחה: ראינו כבר את הלמה הבאה:

למה 0.1 אם $G\subseteq\overline{G}\subseteq U$, $G\in\mathcal{J}$, אזי

$$\operatorname{Vol}\left(\varphi\left(G\right)\right)\leq\int\limits_{G}\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x$$

נראה למה נוספת:

למה 0.2 אם $f:\Omega\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית ואי שלילית, אזי

$$\int\limits_{\Omega} f\leq\int\limits_{\varphi^{-1}(\Omega)}(f\circ\varphi)\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x$$

הוכחה: נרחיב את f להיות 0 מחוץ לקבוצה Ω - כלומר נכפול אותה באינדיקטור. נגדיר P_δ חלוקה של $\mathbb{R}^n$ (עם הקואורדינטות $y_1,\ldots,y_n$) לקוביות בעלות צלע δ. אזי

$$s\left(f\chi_\Omega,P_\delta\right)=\sum_{\square_i} m_{\square_i}\left(f\chi_\Omega\right)\operatorname{Vol}\left(\square_i\right)$$

אם $\square_i$ יוצא אל מחוץ לקבוצה Ω האינפימום שם הוא 0. לכן נמשיך, ונפעיל את הלמה הקודמת עבור $G=\varphi^{-1}\left(\square_i\right)$.

$$\begin{aligned}
s\left(f\chi_\Omega,P_\delta\right) &= \sum_{\square_i\subseteq\Omega_-^{(\delta)}} m_{\square_i}\left(f\right)\mathrm{Vol}\left(\square_i\right) \le \sum_{\square_i\subseteq\Omega_-^{(\delta)}} m_{\square_i}\left(f\right)\int\limits_{\varphi^{-1}\left(\square_i\right)}\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x \le \\
&\le \sum_{\square_i\subseteq\Omega_-^{(\delta)}}\ \int\limits_{\varphi^{-1}\left(\square_i\right)}\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\varphi^{-1}\left(\Omega_-^{(\delta)}\right)}\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x \le \\
&\le \int\limits_{\varphi^{-1}\left(\Omega\right)}\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

קיבלנו כי

$$s\left(f\chi_\Omega,P_\delta\right) \le \int\limits_{\varphi^{-1}\left(\Omega\right)}\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x$$

כעת,

$$\lim_{\delta\to0} s\left(f\chi_\Omega,P_\delta\right) = \int\limits_{\Omega} f \le \int\limits_{\varphi^{-1}\left(\Omega\right)}\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x$$

■

נצטרך עוד למה אחת, ואז נוכל להוכיח את המשפט.

למה 0.3 למעשה, אם $f\ge0$ אזי בלמה הקודמת (ולכן גם בזו שלפניה) יש שוויון.

הוכחה: נסמן

$$g=\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|$$

זו פונקציה $g:\varphi^{-1}\left(\Omega\right)\to\mathbb{R}$, והיא אי שלילית. היא גם אינטגרבילית. נרצה להפעיל עליה את הלמה הקודמת (וזו שלפניה) ולקבל את האי שוויון השני. הפעם הדיפאומורפים שנדבר עליו הוא φ^{-1}.

$$\int\limits_{\varphi^{-1}\left(\Omega\right)} g \le \int\limits_{\Omega}\left(g\circ\varphi^{-1}\right)\left|\det\left(\varphi^{-1}\right)'\left(y\right)\right|\,\mathrm{d}y$$

מכאן,

$$\int\limits_{\varphi^{-1}\left(\Omega\right)}\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x \le \int\limits_{\Omega} f\left(y\right)\left|\det\varphi'\left(\varphi^{-1}\left(y\right)\right)\right|\left|\det\left(\varphi^{-1}\right)'\left(y\right)\right|\,\mathrm{d}y$$

נרצה לטעון כי

$$\left|\det\varphi'\left(\varphi^{-1}\left(y\right)\right)\right|\left|\det\left(\varphi^{-1}\right)'\left(y\right)\right|=1$$

לפי כלל השרשרת:

$$\begin{aligned}\varphi\circ\varphi^{-1}\left(y\right)&=y\\ \varphi'\left(\varphi^{-1}\left(y\right)\right)\cdot\left(\varphi^{-1}\right)'\left(y\right)&=\mathrm{Id}\\ \left|\det\varphi'\left(\varphi^{-1}\left(y\right)\right)\right|\left|\det\left(\varphi^{-1}\right)'\left(y\right)\right|&=1\end{aligned}$$

וכלן קיבלנו כי

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(\Omega)}\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x\le\int\limits_{\Omega}f\left(y\right)\,\mathrm{d}y$$

■

כעת נותר להוכיח את המשפט בהינתן שלושת הלמות.
$f:\Omega\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית ולכן חסומה. ניקח $M>0$ גדול מספיק כדי שיתקיים

$$f+M\ge0$$

ואז יתקיים

$$\int\limits_{\Omega}f=\int\limits_{\Omega}\left(f+M\right)-\int\limits_{\Omega}M$$

שתי הפונקציות הללו הן אי שליליות, ולכן מהלמה האחרונה נקבל:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}f&=\int\limits_{\varphi^{-1}(\Omega)}\left(\left(f+M\right)\circ\varphi\right)\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x-\int\limits_{\varphi^{-1}(\Omega)}\left(M\right)\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x=\\&=\int\limits_{\varphi^{-1}(\Omega)}\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

כנדרש. ■

כעת נראה גרסה דומה אך אחרת של המשפט.

משפט 0.4 יהיו $U\subseteq\mathbb{R}^n$, $V\subseteq\mathbb{R}^n$ כאשר $U,V\in\mathcal{J}$ עם דיפאומורפיזם $\varphi:U\to V$. נניח כי $f:V\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית על V. נניח בנוסף כי $\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|$ פונקציה חסומה על U. אזי

$$\int\limits_{V}f=\int\limits_{U}\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x$$

איך נעשה את זה? ניקח את $V_-^{(\delta)}$ כאשר $\delta = \frac{1}{2^n}$, ונשתמש עליה במשפט בגרסה שראינו כבר. נחזור לדבר על זה אחרי שנדבר על הנושא הבא:

1 מיצוי (Exhaustion)

הגדרה 1.1 בהינתן קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^n$, מיצוי של U הוא סדרת קבוצות $U_i \subseteq U_{i+1}$ כך שמתקיים

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

במקרה הפרטי בו U פתוחה וחסומה, ניקח $\delta_n = \frac{1}{2^n}$, וניקח חלוקה P_{δ_n} של $\mathbb{R}^n$ כרגיל לקוביות עם צלע δ_n. נסמן

$$U_n = U_-^{(\delta_n)} = \left\{ X \in P_{\delta_n} \mid X \subseteq \overline{X} \subseteq P_{\delta_n} \right\}$$

נקבל ככה U_n קומפקטיות עבורן

$$\begin{aligned} &\mathrm{Int} U_n \subseteq U_n \subseteq U \\ &\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U \end{aligned}$$

ולכן זהו מיצוי.
באותה שיטהת אם U איננה חסומהת ניתן לבנות מיצוי שלה

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Int} U_n$$

כאשר כל U_n היא אוסף סופי של תיבות ולכן מדידה ז'ורדן. כעת, נסמן

$$V_m = U \cap \{|x| \leq m\}$$

ואז

$$U = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$$

כל U_m פתוחה וסומה. לכן לפי השלב הקודם נוכל לבנות להן מיצוי:

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1^{(1)} \cup U_2^{(1)} \cdots \cup U_m^{(1)} \cup \ldots \\ V_2 &= U_1^{(2)} \cup U_2^{(2)} \cdots \cup U_m^{(2)} \cup \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

וכעת נוכל לבחור בתור הקבוצות במיצוי של U את האלכסונים:

$$\begin{aligned} & U_1^{(1)} \\ & U_1^{(2)} \cup U_2^{(1)} \\ & \vdots \end{aligned}$$

למה 1.2 תהי $\mathcal{J} \ni U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה. נניח כי $U_1, \ldots, U_n$ מיצוי של U כאשר $U_i \in \mathcal{J}$. אזי

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Vol}\,(U_n) = \mathrm{Vol}\,(U)$$

הוכחה: ברור כי הנפח $\mathrm{Vol}\,(U_n)$ מונוטוני עולה וחסום על ידי $\mathrm{Vol}\,(U)$. U חסומה, ולכן $\overline{U}$ קומפקט, ∂U מנפח אפס, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיימות תיבות פתוחות $A_1, \ldots, A_N$ כך שמתקיים

$$\partial U \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} A_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Vol}\,(A_i) < \varepsilon$$

נגדיר

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$$

זו קבוצה פתוחה, $A, U_1, U_2, \ldots$ אוסף קבוצות פתוחות. כמו כן,

$$A \cup \bigcup U_i \supseteq \overline{U}$$

לכן קיים תת כיסוי סופי, אבל בגלל ההכלה של U_n נוכל למעשה לכתוב

$$A \cup U_m \supseteq \overline{U}$$

לכן

$$A \supseteq \overline{U} \backslash U_m$$

ולכן

$$\varepsilon > \mathrm{Vol}\,(A) \geq \mathrm{Vol}\,(U) - \mathrm{Vol}\,(U_m)$$

■

בעזרת הלמה הזו, המשפט מקודם נובע ישירות ממשפט החלפת המשתנים: **הוכחה:** ניקח מיצוי $\{\Omega_n\}$ של V, כאשר

$$\Omega_n \subseteq \overline{\Omega_n} \subseteq V$$

■

ואז נגדיר

$$G_n = \varphi^{-1}\,(\Omega_n)$$

וזה יהיה מיצוי של U. עבור Ω_n, G_n משפט החלפת המשתנים תקף, ולכן

$$\int\limits_{G_n} (f \circ \varphi)\,|\det \varphi'\,(x)|\;\mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega_n} f\,(y)\;\mathrm{d}y$$

כעת,

$$\int\limits_{U} (f \circ \varphi)\,|\det \varphi'\,(x)| = \int\limits_{G_n} (f \circ \varphi)\,|\det \varphi'\,(x)| + \int\limits_{U \setminus G_n} (f \circ \varphi)\,|\det \varphi'\,(x)| \to 0$$

$$\int\limits_{V} f = \int\limits_{\Omega_n} f + \int\limits_{V \setminus \Omega_n} f \to 0$$

וכך נקבל את השוויון שנרצה.

דוגמאות

1. נפח של אליפסואיד: תהי A מטריצה ממימד n, סימטרית ומוגדרת חיובית. נגדיר $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x\rangle \leq 1\}$. אליפסואיד סטנדרטי:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1$$

כלומר עם המטריצה

$$A = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{a_i^2}\right)_{i=1}^{n}$$

נחשב את הנפח על ידי מציאת טרנספורמציה לינארית שתעביר אותו לכדור היחידה. ניקח

$$L\,(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1}{a_1}, \ldots, \frac{x_n}{a_n}\right)$$

ברור שאכן $L:E\to B_1$. כעת,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\left(L\left(E\right)\right)&=\left|\det L\right|\mathrm{Vol}E\\ \kappa_n&=\left|\frac{1}{a_1\cdots a_n}\right|\mathrm{Vol}E\\ \mathrm{Vol}\left(E\right)&=a_1\cdots a_n\kappa_n\end{aligned}$$

כאשר κ_n הוא נפח הכדור ברדיוס 1 בתוך $\mathbb{R}^n$. נוכל לכתוב גם

$$\mathrm{Vol}\left(E\right)=\frac{\kappa_n}{\sqrt{\det A}}$$

אם A מטריצה סימטרית ומוגדרת חיובית, אזי לפי המשפט הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי של ווקטורים עצמיים של A. כלומר, אפשר לעבור מהקואורדינטות $x_1,\dots,x_n$ לקואורדינטות חדשות $y_1,\dots,y_n$ על ידי מטריצה אורתוגונלית, כך שבקואורדינטות החדשות, האליפסואיד יהיה סטנדרטי. הפעלת טרנספורמציה אורתוגונלית לא משנה נפח, ולכן נקבל שלכל אליפסואיד E שמוגדר על ידי מטריצה סימטרית ומוגדרת חיובית A מתקיים

$$\mathrm{Vol}\left(E\right)=\frac{\kappa_n}{\sqrt{\det A}}$$

2. נרצה לחשב

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

זה נקרא אינטגרל פואסון. למעשה נחשב משהו מעט שונה:

$$\begin{aligned}&f\left(x,y\right)=e^{-x^2-y^2}\\ &\int_{B_R}f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=?\end{aligned}$$

נבצע החלפת משתנים, לקואורדינטות קוטביות. התחום V הוא B_R, והתחום U הוא התחום בקואורדינטות פולריות שבו

$$\begin{aligned}&0\le r\le R\\ &0\le\alpha\le2\pi\end{aligned}$$

זהו מלבן. הדיפאומורפיזם הוא

$$\left(r,\alpha\right)\to\left(r\cos\alpha,r\sin\alpha\right)$$

הנגזרת היא r. לכן,

$$\int\limits_{B_R} f = \int\limits_{U} e^{-r^2} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha$$

לפי פוביני נוכל לחשב:

$$\int\limits_{U} e^{-r^2} r = 2\pi \int\limits_{0}^{R} e^{-r^2} r \,\mathrm{d}r = \pi \int\limits_{0}^{R^2} e^{-z} \,\mathrm{d}z = -\pi e^{-z} \mid_0^{R^2} =$$
$$= \pi \left(1 - e^{-R^2}\right)$$