חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

ארזים ©

22 בינואר 2017

נחזור להוכיח את הלמה שראינו בשיעור שעבר:

למה 0.1 יהיו G,U תחומים כאשר $G \subseteq \overline{G} \subseteq U$. נתון כי $G \in \mathcal{J}$, וכי φ דיפאומורפיזם. אזי

$$\mathrm{Vol}\left(\varphi\left(G\right)\right) \leq \int\limits_{G} \left|\det \varphi'\left(x\right)\right| \,\mathrm{d}x$$

הוכחה: הוכחנו בעבר כי $\varphi\left(G\right) \in \mathcal{J}$. כעת יהי ψ דיפאומורפיזם מקוביה C עם צלע 2δ. נסמן

$$K = \sup_{C} \left|\left|\varphi'\right|\right|_{\infty}$$

נסמן את מרכזה של C בנקודה a. הראינו שמתקיים, עבור $x \in C$

$$\left|\left|\psi\left(a\right) - \psi\left(x\right)\right|\right|_{\infty} \leq \sup_{C} \left|\left|\psi'\right|\right|_{\infty} \left|\left|a - x\right|\right|_{\infty} \leq \delta K$$

אזי מתקיים

$$\mathrm{Vol}\left(\psi\left(C\right)\right) \leq \left(\sup_{C} \left|\left|\psi'\right|\right|_{\infty}\right)^{n} \mathrm{Vol}\left(C\right) = K^{n}\delta^{n}$$

כעת, תהי L טרנספורמציה לינארית הפיכה. נגדיר

$$\psi = L^{-1} \circ \varphi$$

אזי

$$\mathrm{Vol}\left(L^{-1}\varphi\left(C\right)\right) \leq \left(\sup_{C} \left|\left|L^{-1} \circ \varphi'\right|\right|_{\infty}\right)^{n} \mathrm{Vol}\left(C\right)$$

ראינו כי $\operatorname{Vol}(LE) = |\det L| \operatorname{Vol}(E)$ ולכן

$$\operatorname{Vol}\left(L^{-1}\varphi(C)\right) = \operatorname{Vol}(\varphi(C)) \left|\det\left(L^{-1}\right)\right|$$

כלומר קיבלנו כי

$$\operatorname{Vol}(\varphi(C)) \leq \sup_C \left|\left|\left(L^{-1}\varphi\right)'\right|\right|_\infty^n \operatorname{Vol}(C) |\det L|$$

כעת, ניקח חלוקה P_δ של $\mathbb{R}^n$ לקוביות בעלות צלע δ. עבור $G \in \mathcal{J}$, נסמן כעת תמיד

$$\bigcup_{P_i \cap \overline{G} \neq \emptyset} P_i = \overline{G}_+^\delta$$

ואם δ קטן מספיק מתקיים $\overline{G}_+^\delta \subseteq U$.

טענה 0.2 לכל $\varepsilon > 0$ נוכל למצוא $N > 0$ עבורו

$$||x-y|| < \frac{\delta}{N}, x, y \in \overline{G}_+^\delta \Rightarrow \left|\left|\varphi'^{-1}(x)\varphi'(y)\right|\right| < 1+\varepsilon$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\left|\left|\varphi'(x)^{-1}\varphi'(y)\right|\right|_\infty - 1 &\leq \left|\left|\varphi'(x)^{-1}\varphi'(y) - I\right|\right|_\infty = \left|\left|\varphi'(x)^{-1}\left(\varphi'(y)-\varphi'(x)\right)\right|\right|_\infty \leq \\ &\leq \left|\left|\varphi'(x)^{-1}\right|\right|_\infty ||\varphi'(x)-\varphi'(y)||_\infty \leq K\,||\varphi'(x)-\varphi'(y)||_\infty\end{aligned}$$

כאשר

$$K = \max_{\overline{G}_+^\delta} \left|\left|\varphi'^{-1}\right|\right|_\infty$$

לפי רציפות במידה שווה של φ' על $\overline{G}_+^\delta$ מתקיים שלכל $\varepsilon > 0$ ניתן למצו $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in \overline{G}_+^\delta$ עם $||x-y||_\infty < \delta$ מתקיים $||\varphi'(x)-\varphi'(y)|| < \frac{\varepsilon}{K}$. לכן בסך הכל נקבל כי הביטוי למעלה קטן מאשר ε. לכן סיימנו. ■

כעת, נעדן את החלוקה P_δ לחלוקה $P_{\frac{\delta}{N}}$, כאשר N בשליטתנו. ניקח C_i מתוך $P_{\frac{\delta}{N}}$ וניקח $a_i \in C_i \cap \overline{G}$ אקראיים. כעת, נשתמש במה שראינו כבר:

$$\operatorname{Vol}(\varphi(C_i)) \leq |\det\varphi'(a_i)| \left(\sup_{C_i}\left|\left|\varphi'(a_i)^{-1}\varphi'\right|\right|_\infty\right)^n \operatorname{Vol}(C_i) \leq |\det\varphi'(a_i)|(1+\varepsilon)^n \operatorname{Vol}(C_i)$$

כעת,

$$\operatorname{Vol}(\varphi(G)) \leq \operatorname{Vol}\left(\varphi\left(\overline{G}_+^{\frac{\delta}{N}}\right)\right) \leq (1+\varepsilon)^n \sum_i |\det\varphi'(a_i)| \operatorname{Vol}(C_i) \leq (1+\varepsilon)^n S\left(\left|\det\varphi'(x)\chi_{\overline{G}}\right|, P_{\frac{\delta}{N}}\right)$$

ניקח גבול כאשר ונקבל

$$\mathrm{Vol}\left(\varphi\left(G\right)\right) \leq \left(1+\varepsilon\right)^{n} \int\limits_{G} \left|\det \varphi'\left(x\right)\right| \, \mathrm{d}x$$

וזה נכון לכל $\varepsilon > 0$. לכן נקבל את האי שוויון שבטענה. ∎