חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

21 בינואר 2017

תזכורת סימנו בתור $\pi(v_1,\ldots,v_n)$ את המקבילון הנפרש על ידי $v_1,\ldots,v_n$. ראינו שהמקבילון מתאים למטריצת גראהם:

$$\mathrm{Vol}(\pi)=\det\begin{pmatrix}v_1 & \ldots & v_n\end{pmatrix}=\sqrt{\det\left(\langle v_i,v_j\rangle\right)_{i,j}}=\sqrt{\det G(v_1,\ldots,v_n)}$$

כעת נראה נוסחה רקורסיבית עבור נפח π (נוכיח באינדוקציה הנוסחה שלמעלה).
נגדיר את v_{n+1} להיות $w+h$, כאשר $w\in\mathrm{span}(v_1,\ldots,v_n)$, וכן $h\in(\mathrm{span}(v_1,\ldots,v_n))^{\perp}$.
אז יש לנו שני מקבילונים, $\pi(v_1,\ldots,v_n,v_{n+1})$, $\pi(v_1,\ldots,v_n,h)$. לפי עיקרון קאוואליירי הם שווי נפח, כי כך חתך הוא שווה שטח. כעת, נותר לשים לב

$$\pi(v_1,\ldots,v_n,h)=\pi(v_1,\ldots,v_n)\times[0,h]$$
$$\mathrm{Vol}(\pi(v_1,\ldots,v_n,h))=|h|\,\mathrm{Vol}(\pi(v_1,\ldots,v_n))$$

זה מאוד הגיוני - כשמחשבים שטח של מקבילית, כופלים את הגובה באורך הבסיס. אותו רעיון!
נמשיך לחשב:

$$\begin{aligned}G(v_1,\ldots,v_{n+1})&=\begin{pmatrix}G(v_1,\ldots,v_n) & \left(\langle v_i,w+h\rangle\right)_{i=1}^n\\ \left(\langle w+h,v_i\rangle\right)_{i=1}^n & \langle w+h,w+h\rangle\end{pmatrix}=\\&=\begin{pmatrix}G(v_1,\ldots,v_n) & \left(\langle v_i,w\rangle\right)_{i=1}^n\\ \left(\langle w,v_i\rangle\right)_{i=1}^n & |w|^2+|h|^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned}\det G(v_1,\ldots,v_{n+1})&=\det\begin{pmatrix}G(v_1,\ldots,v_n) & \left(\langle v_i,w\rangle\right)_{i=1}^n\\ \left(\langle w,v_i\rangle\right)_{i=1}^n & |w|^2\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}G(v_1,\ldots,v_n) & 0\\ \left(\langle w,v_i\rangle\right)_{i=1}^n & |h|^2\end{pmatrix}=\\&=\det G(v_1,\ldots,v_n,w)+|h|^2\det(v_1,\ldots,v_n)\end{aligned}$$

נשים לב שבגלל שלקחנו $w\in\mathrm{span}(v_1,\ldots,v_n)$, מתקיים $\det(G(v_1,\ldots,v_n,w))=0$ (תרגיל). לכן

$$\sqrt{\det G(v_1,\ldots,v_{n+1})}=|h|\sqrt{\det G(v_1,\ldots,v_n)}$$

וזה אותו כלל כמו קודם.
נבדוק את מקרה הבסיס, $n=1$:

$$\operatorname{Vol}\left(\pi\left(v_1\right)\right)=\left|v_1\right|=\sqrt{\det G\left(v_1\right)}=\sqrt{\det\left(\left\langle v_1,v_1\right\rangle\right)}=\sqrt{\det\left(\left|v_1\right|^2\right)}=\sqrt{\left|v_1\right|^2}$$

לכן הוכחנו את הנוסחה באינדוקציה.

1 החלפת משתנים באינטגרל

משפט 1.1 יהיו U,V תחומים בתוך $\mathbb{R}^n$, ויהי $\varphi:U\to V$ דיפאומורפיזם. נסמן $D\varphi=\varphi'$, וכן נניח כי $\det\left(\varphi'\left(x\right)\right)\neq 0$. יהי Ω תחום המקיים $\Omega\subseteq\overline{\Omega}\subseteq V$, וכן $\Omega\in\mathcal{J}$. תהי f פונקציה אינטגרבילית על Ω. אזי $\varphi^{-1}\left(\Omega\right)\in\mathcal{J}$, וכן

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(\Omega)} f\circ\varphi\left(x_1,\ldots,x_n\right)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=\int\limits_{\Omega} f\left(y_1,\ldots,y_n\right)\,\mathrm{d}y_1\ldots\mathrm{d}y_n$$

הסבר לא פורמלי: אם ניקח תיבה מאוד קטנה בתוך $\varphi^{-1}\left(\Omega\right)$ שהנפח שלה הוא $\Delta x_1\cdots\Delta x_n$, אז היא תועבר על ידי φ למקבילון שנפרש על ידי הווקטורים $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$ עם האורכים $\Delta x_1,\ldots\Delta x_n$. נפח של מקבילון הוא הדטרמיננטה של המטריצה עם הווקטורים האלה בתוכה, כלומר

$$\Delta x_1\cdots\Delta x_n\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)=\det\varphi'\left(x\right)\cdot\Delta x_1\cdots\Delta x_n$$

ולכן סכום רימן של האינטגרל השמאל במשפט דומה לשל החלק הימני.