חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

ארזים ©

29 בדצמבר 2016

1 משפט פוביני

ניזכר בניסוח המשפט:

משפט 1.1 תהי $f:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}$, כאשר נסמן את הקואורדינטות הראשונות $x=(x_1,\dots,x_n)$ ואת האחרונות $y=(y_1,\dots,y_m)$. יהיו $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $B\subseteq\mathbb{R}^m$ תיבות, ונניח כי f אינטגרבילית על $A\times B$. אזי לכל $x\in A$, נגדיר

$$F(x)\in\left[\left(\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)_*,\left(\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^*\right]$$

נשים לב כי אם f_x אינטגרבילית אזי הקטע הוא נקודה. כעת, מתקיימים הבאים:

1. F אינטגרבילית על A, ומתקיים

$$\int_{A\times B} f=\int_A F$$

2. הקבוצה Z של הנקודות x עבורן f_x לא אינטגרבילית היא זניחה.

3. באופן שקול, עבור

$$G(y)\in\left[\left(\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)_*,\left(\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)^*\right]$$

מתקיים

$$\int_{A\times B} f=\int_B G$$

הוכחה: תהי Q חלוקה של B, P חלוקה של A. אזי

$$T = P \times Q = \{P_i \times Q_j\}$$

חלוקה של $A \times B$. אזי

$$s(f,T) = \sum_{i,j} m_{P_i \times Q_j} \mathrm{Vol}(P_i) \mathrm{Vol}(Q_j) = \sum_i \mathrm{Vol} P_i \sum_j m_{P_i \times Q_j} \mathrm{Vol}(Q_j)$$

כמו כן, לכל $x \in P_i$ מתקיים

$$m_{P_i \times Q_j}(f) \le m_{Q_j}(f_x)$$

לכן נקבל

$$\sum_j m_{p_i \times Q_j} \mathrm{Vol}(Q_j) \le \sum_j m_{Q_j}(f_x) \mathrm{Vol}(Q_j) = s(f_x, Q) = \left(\int_B f_x(y)\, \mathrm{d}y \right)_* \le F(x)$$

זה נכון לכל $x \in P_i$, ולכן בפרט עבור האינפימום:

$$m_{P_i}(F) \ge \sum_j m_{P_i \times Q_j} \mathrm{Vol}(Q_j)$$

לכן נקבל

$$s(f,T) = \sum_{i,j} m_{P_i \times Q_j} \mathrm{Vol}(Q_j) \mathrm{Vol}(P_i) \le \sum_i m_{P_i}(F) \mathrm{Vol}(P_i) = s(F,P)$$

לכן $s(f,T) \le s(F,P)$. באותו אופן, נתחיל עם $S(f,T)$ ולקבל באותה צורה בדיוק $S(f,T) \ge S(F,P)$. בסהך הכל:

$$s(f,T) \le s(F,P) \le S(F,P) \le s(f,T)$$

כעת, f אינטגרבילית ולכן ההפרש בין האיברים הקיצוניים קטן כרצוננו:

$$I - \varepsilon \le s(f,T) \le s(F,P) \le S(F,P) \le S(f,T) \le I + \varepsilon$$

לכן כמו שרצינו

$$\int_A F = I$$

■

מסקנה 1.2 תהי

$$f\left(x,y\right)=\varphi\left(x\right)\psi\left(y\right)$$

כאשר φ אינטגרבילית על $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$, ψ אינטגרבילית על $B\subseteq\mathbb{R}^{m}$. אזי f אינטגרבילית על $A\times B$ ומתקיים

$$\int\limits_{A\times B}f=\int\limits_{A}\varphi\int\limits_{B}\psi$$

הוכחה: מתקיים

$$B_{f}\subseteq\left(B_{\varphi}\times B\right)\cup\left(A\times B_{\psi}\right)$$

וזו קבוצה ממידה אפס, לכן f אכן אינטגרבילית. ממשפט פוביני:

$$F\left(x\right)=\int f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y=\int\varphi\left(x\right)\psi\left(y\right)\,\mathrm{d}y=\varphi\left(x\right)\cdot\int\limits_{B}\psi$$

וכעת אנחנו יודעים כי

$$\int\limits_{A\times B}f=\int\limits_{A}F\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{A}\left(\varphi\left(x\right)\cdot\int\limits_{B}\varphi\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{A}\varphi\cdot\int\limits_{B}\psi$$

כנדרש. ∎

הערה 1.3 בדוגמה משיעורי הבית, עבור הפונקציה האינטגרבילית

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\vee y\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},y\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

עבור $\left(x,y\right)\in\left[0,1\right]^{2}$, אם x אי רציונאלי, f_{x} אינטרבילית, ואם x רציונאלי היא לא (כמו פונקציית דיריכלה אבל בגובה אחר). לכן הקבוצה Z מהמשפט היא ממידה אפס אבל לא מנפח אפס.

הערה 1.4 אם עבור f כלשהי Z מנפח אפס (למשל סופית) אז במשפט פוביני אפשר להגדיר את $F\left(x\right)$ כרצוננו בכל $x\in Z$, שכן ניתן לשנות את ערך הפונקציה בקבוצה מנפח אפס מבלי לשנות את ערך האינטגרל. לעומת זאת, ההערה הקודמת מראה שאם Z רק ממידה אסס אז לא נוכל לקחת ערכים של F מחוץ לקטע הנתון במשפט. אם ניקח במקום $F\left(x\right)\in\left[0,\frac{1}{q}\right]$ בנקודות רציונאליות $F\left(x\right)=1$, אז המשפט יפסיק להתקיים כי אז F לא תהיה אינטגרבילית יותר.