חשבון דיפרנציאלי ואיטגרלי 3

20 בדצמבר 2016

1 נפח ומדידות ז'ורדן

ראינו בשיעור שעבר שכדור B_R במרחב $\mathbb{R}^n$ הוא מדיד ז'ורדן (בעל נפח), כלומר $B_R \in \mathcal{J}$.

טענה 1.1 תהי $f : Q \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן וחיובית ממש. אזי

$$\Gamma = \left\{ \left(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\right) \mid 0 \le x_{n+1} \le f\left(x_1, \ldots, x_n\right) \right\} \in \mathcal{J}$$

הוכחה: תהי P חלוקה של Q. ניזכר בסכומי דרבו של f לפי P:

$$S\left(f, P\right) = \sum_j M_j \mathrm{Vol} P_j$$
$$s\left(f, P\right) = \sum_j m_j \mathrm{Vol} P_j$$

נגדיר Γ_- להיות אוסף התיבות במרחב $\mathbb{R}^{n+1}$ כך שבקואורדינטות הרשונות יש נקודה מתוך P_j, והקואורדינטה האחרונה מקיימת $0 \le x_{n+1} \le m_j$. באתה צורה נגדיר Γ_+ עם M_j.

לפי ההגדרה $\Gamma_- \subseteq \Gamma \subseteq \Gamma_+$, וכן $\mathrm{Vol}\left(\Gamma_-\right) = s\left(f, P\right)$, $\mathrm{Vol}\left(\Gamma_+\right) = S\left(f, P\right)$. f אינטגרבילית, ולכן $S\left(f, P\right) - s\left(f, P\right) < \varepsilon$ לכל ε על ידי בחירת P מתאימה. נשים לב שההפרש הזה הוא בדיוק הנפח של התיבות המכסות את $\partial\Gamma$, כלומר $\mathrm{Vol}\left(\partial\Gamma\right) = 0$, ולכן $\Gamma \in \mathcal{J}$.

כדי לחשב את הנפח של Γ נחשב ונקבל

$$\mathrm{Vol}\Gamma_- \le \mathrm{Vol}\Gamma \le \mathrm{Vol}\Gamma_+$$
$$s\left(f, P\right) \le \mathrm{Vol}\Gamma \le S\left(f, P\right)$$
$$I_*\left(f\right) \le \mathrm{Vol}\Gamma \le I^*\left(f\right)$$

אבל f אינטגרבילית, ולכן $I^*\left(f\right) = I_*\left(f\right)$, כלומר

$$\mathrm{Vol}\Gamma = \int_Q f$$

■

הערה 1.2 למעשה הטענה עובדת גם בכיוון השני - אם $\Gamma \in \mathcal{J}$ אזי f אינטגרבילית רימן.

תרגילים הוכיחו את הכיוון ההפוך, ותארו את $\partial\Gamma$.

משפט 1.3 תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$. נתבונן בקבוצה $E + c = \{e + c \mid e \in E\}$. אזי $\mathrm{Vol}(E) = \mathrm{Vol}(E + c)$.

הוכחה: מתקיים

$$\chi_{E+c}(x) = \chi_E(x - c)$$

כל פונקציה אינטגרבילית על Q שניקח, שנסמן f, תגדיר פונקציה

$$f_c(x) = f(x - c)$$

שהיא אינטגרבילית על $Q + c$. בפרט עבור האינדיקטורים, וסיימנו. ∎

משפט 1.4 תהי $A \in O(m)$ מטריצה אורתוגונלית. אזי לכל $E \in \mathcal{J}$ מתקיים $AE \in \mathcal{J}$, וכן $\mathrm{Vol}(AE) = \mathrm{Vol}(E)$.

הוכחה: נשתמש בלמה. נסמן $\boxed{a}$ את קוביה בעלת צלע a.

למה 1.5 תהי $\nu : \mathcal{J} \to \mathbb{R}_+$ המקיימת:

1. לכל $E \in \mathcal{J}$ ולכל $c \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\nu(E + c) = \nu(E)$.
2. לכל $E_1, \ldots, E_n$, כאשר $E_i \cap E_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$, אזי

$$\sum_{i=1}^{n} \nu(E_i) = \nu(E_1 \cup \cdots \cup E_n)$$

אזי לכל $E \in \mathcal{J}$ מתקיים $\nu(E) = \nu\left(\boxed{1}\right) \cdot \mathrm{Vol}(E)$.

הוכחה: על ידי חלוקת קוביית היחידה לקוביות קטנות יותר, נוכל לקבל

$$\nu\left(\boxed{1}\right) = 2^{mn}\nu\left(\boxed{2^{-m}}\right)$$

בגלל התכונות של ν. לכן הוכחנו את הנדרש עבור תיבות בעלות צלע 2^{-m}.
כעת לקוביה כללית Q, נסמן בתור Q_- את אוסף הקוביות בעלות צלע 2^{-m} שמוכלות בתוך Q, ובתור Q_+ את אוסף הקוביות בעלות צלע 2^{-m} שנחתכות עם Q. לפי האדיטיביות של ν נקבל

$$\nu(Q_+) = \nu\left(\boxed{1}\right)\mathrm{Vol}(Q_+)$$
$$\nu(Q_-) = \nu\left(\boxed{1}\right)\mathrm{Vol}(Q_-)$$

לכן מתקיים אי שוויון

$$\nu\left(Q_{-}\right) \leq \nu\left(Q\right) \leq \nu\left(Q_{+}\right)$$

אי שוויון כזה מתקיים גם עבור הנפח:

$$\operatorname{Vol}\left(Q_{-}\right) \leq \operatorname{Vol}\left(Q\right) \leq \operatorname{Vol}\left(Q_{+}\right)$$

לכן נקבל

$$\nu\left(Q_{-}\right)-\nu\left(\boxed{1}\right)\operatorname{Vol}\left(Q_{+}\right) \leq \nu\left(Q\right)-\nu\left(\boxed{1}\right)\operatorname{Vol}\left(Q\right) \leq \nu\left(Q_{+}\right)-\nu\left(\boxed{1}\right)\operatorname{Vol}\left(Q_{-}\right)$$
$$\nu\left(\boxed{1}\right)\left(\operatorname{Vol}Q_{-}-\operatorname{Vol}Q_{+}\right) \leq \nu\left(Q\right)-\nu\left(\boxed{1}\right)\operatorname{Vol}\left(Q\right) \leq \nu\left(\boxed{1}\right)\left(\operatorname{Vol}Q_{+}-\operatorname{Vol}Q_{-}\right)$$

$Q \in \mathcal{J}$, ולכן על ידי בחירת m גדול מספיק, נוכל לקבל לכל $\varepsilon > 0$ את האי שוויון $0 \leq \operatorname{Vol}Q_{+}-\operatorname{Vol}Q_{-} < \varepsilon$. לכן נקבל

$$\nu\left(Q\right)-\nu\left(\boxed{1}\right)\operatorname{Vol}\left(Q\right)=0$$
$$\nu\left(\boxed{1}\right)\operatorname{Vol}\left(Q\right)=\nu\left(Q\right)$$

נותר להראות עבור כל קבוצת ז'ורדן $E \in \mathcal{J}$. ההוכחה זהה לחלוטין, רק שכעת ניתן לחלק לכל תיבה שרוצים. ■

כעת, נוכיח עבור מטריצה כללית A כי אם $E \in \mathcal{J}$ אזי $AE \in \mathcal{J}$.
אם A לא הפיכה, התמונה שלה היא תת מרחב של $\mathbb{R}^m$. לכן כל קבוצה חסומה בתוך $\mathbb{R}^m$ נמצאת בתת מרחב בעל נפח אפס.
אם A הפיכה, אזי A היא הומיאומורפיזם. לכן $\partial\left(AE\right)=A\partial\left(E\right)$. תהי $E \in \mathcal{J}$, אזי $\operatorname{Vol}\left(\partial E\right)=0$. כעת, A לינארית ולכן ליפשיץ, ולכן $\operatorname{Vol}\left(A\left(\partial E\right)\right)=0$, כלומר $\operatorname{Vol}\left(\partial\left(AE\right)\right)=0$, ולכן $AE \in \mathcal{J}$.
כעת נחזור לעבוד עם $A \in O\left(m\right)$. נגדיר $\nu\left(E\right)=\operatorname{Vol}\left(AE\right)$. נשים לב שהפונקציה הזו היא $\nu : \mathcal{J} \to \mathbb{R}_{+}$. כמו כן,

$$\nu\left(E+c\right)=\operatorname{Vol}\left(A\left(E+c\right)\right)=\operatorname{Vol}\left(AE+Ac\right)=\operatorname{Vol}\left(AE\right)=\nu\left(E\right)$$

וכן, בהינתן $E_1,\dots,E_n$ זרות בזוגות, גם $AE_1,\dots,AE_n$ זרות בזוגות, ולכן

$$\nu\left(E_1\cup\dots\cup E_n\right)=\operatorname{Vol}\left(A\left(E_1\cup\dots\cup E_n\right)\right)=\operatorname{Vol}\left(AE_1\cup\dots\cup AE_n\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Vol}\left(AE_i\right)=\sum_{I=1}^{n}\nu\left(E_i\right)$$

לכן ν מקיימת את תנאי הלמה, ולכן

$$\mathrm{Vol}\left(AE\right)=\nu\left(E\right)=\nu\left(\boxed{1}\right)\cdot\mathrm{Vol}\left(E\right)=\mathrm{Vol}\left(A\boxed{1}\right)\cdot\mathrm{Vol}\left(E\right)$$

כעת, $A\in O\left(m\right)$, כלומר $|Ax|=|x|$ לכל $x\in\mathbb{R}^{m}$. נגדיר

$$B=\left\{x\in\mathbb{R}^{m}\mid|x|\leq1\right\}$$

ראינו כי $B\in\mathcal{J}$, ומתקיים גם $A\left(B\right)=B$. נבחר $E=B$ ונקבל $\mathrm{Vol}\left(AE\right)=\mathrm{Vol}\left(E\right)=\mathrm{Vol}\left(A\boxed{1}\right)\mathrm{Vol}\left(E\right)$ ולכן בהכרח $\mathrm{Vol}\left(A\boxed{1}\right)=1$, שכן $\mathrm{Vol}\left(B\right)\neq0$, ולכן סיימנו. ■

1.1 משפט פוביני

נרצה לדון באינטגרל חוזר:

$$\int\limits_{Q}f=\int\limits_{Q}f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{?}{=}\int\limits_{[a_1,b_1]}\left(\int\limits_{[a_2,b_2]}f\left(x,t\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$$

נסמן נקודות במרחב $\mathbb{R}^{n}$ בתור $x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, ונקודות במרחב $\mathbb{R}^{m}$ בתור $y=\left(y_1,\ldots,y_m\right)$. ניקח $A\subseteq\mathbb{R}^{n},B\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תיבות, אזי $A\times B$ תיבה בתוך $\mathbb{R}^{n+m}$. תהי $f:A\times B\to\mathbb{R}$ פונקציה. בהינתן $x\in A$ נגדיר $f_x\left(y\right)=f\left(x,y\right)$, ובהינתן $y\in B$ נגדיר $f_y\left(x\right)=f\left(x,y\right)$. נגדיר פונקציה:

$$F\left(x\right)=c,c\in\left[I_{*}\left(f_x\right),I^{*}\left(f_x\right)\right]$$

אם עבור x מסויים f_x אינטגרבילית על B, אזי

$$F\left(x\right)=\int\limits_{B}f_x\left(y\right)\,\mathrm{d}y$$

זה ברור.

משפט 1.6 (משפט פוביני) בסימונים שלמעלה, אם f אינטגרבילית על $A\times B$, אזי:

1. F אינטגרבילית על A ומתקיים

$$\int\limits_{A\times B}f=\int\limits_{B}F$$

2. בפרט, תמיד ניתן לבחור את c בהגדרת $F\left(x\right)$ להיות קצה מסויים של הקטע:

$$\int\limits_{A\times B}f=\int\limits_{A}I^{*}\left(f_{x}\right)=\int\limits_{A}I_{*}\left(f_{x}\right)$$

סימון אחר:

$$\int\limits_{A\times B}f=\int\limits_{A}\left(\int\limits_{B}f_{x}\right)_{*}=\int\limits_{A}\left(\int\limits_{B}f_{x}\right)^{*}$$

3. למעשה, קבוצת אותן נקודות $x\in A$ שעבורן f_{x} איננה אינטגרבילית על B היא קבוצה ממידה 0.

את ההוכחה נראה בשיעור הבא.

דוגמאות

1. ניקח $f\left(x,y\right)=\frac{x-y}{\left(x+y\right)^{3}}$, $A=\left[0,1\right]=B$.

$$\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{1}f\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

$$\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{1}f\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}$$

איך זה מסתדר? f לא חסומה על $\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]$, למשל בסביבת 0, ולכן לא אינטגרבילית עליה.

2. כתרגיל, הראו שקיימת קבוצה $Z\subseteq\mathbb{R}^{2}$ שצפופה במישור, כך שעל כל קו ישר אנכי יש לא יותר מנקודה אחת של Z, ואותו דבר על כל קו אופקי.
נגדיר

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}1 & \left(x,y\right)\in Z\\0 & otherwise\end{cases}$$

ואותה נגדיר על $Z\cap\left[0,1\right]^{2}$. f איננה אינטגרבילית, שכן סכום דרבו העליון הוא תמיד 1, והתחתון הוא תמיד 0 (Z צפופה). עם זאת,

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad\int f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y=0$$

$$\forall y\in\mathbb{R}\quad\int f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}x=0$$

ולכן מתקיים

$$\int\left(\int f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y=\int\left(\int f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}y=0$$