חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

10 בדצמבר 2016

"היום נעסוק בנושא שעניין את האנושות במשך הרבה מאוד זמן. כבר בזמנים קדמונים, שאלו בני ישראל בסוכה - מה שטח הסוכה? מה זה שטח של מעגל? מה זה מידה?" -המרצה

ניזכר בהגדרה:

$$\mathrm{vol}\left(Q_{a,b}\right)=\prod_{i}\left|b_{i}-a_{i}\right|$$

תרגיל נניח כי P חלוקה של Q, $Q=\bigcup P_{i}$. אזי

$$\mathrm{vol}Q=\sum_{i}\mathrm{vol}P_{i}$$

משפט 0.1 (לבג) (שאנחנו ממש לא מוכנים לקראתו) תהי $f:Q_{a,b}\to\mathbb{R}$, ונסמן את קבוצת נקודות האי רציפות של f בתור B. אזי f אינטגרבילית לפי רימאן אם ורק אם

$$\mathrm{measure}\left(B\right)=0$$

דוגמא פונקציית דיריכלה (או דירישלה, לפי המרצה), אינה רציפה באף נקודה, ולכן מהמשפט לא אינטגרבילית רימן.

תרגיל נגדיר

$$f=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\\ \frac{1}{n} & x=\frac{m}{n}\end{cases}$$

מהן נקודות האי-רציפות?

הגדרה 0.2 נאמר כי קבוצה Z היא בעלת <u>מידה אפס</u> אם לכל $\varepsilon>0$ ניתן לכסות את Z על ידי כמות בת מניה של תיבות $\left\{P_{i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ כך שמתקיים

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{vol}P_{i}<\varepsilon$$

הגדרה 0.3 נאמר כי קבוצה Z היא בעלת נפח אפס אם לכל $\varepsilon > 0$ ניתן לכסות את Z על ידי כמות סופית של תיבות $\{P_i\}_{i=1}^{k}$ כך שמתקיים

$$\sum_{i=1}^{k} \text{vol} P_i < \varepsilon$$

הערה 0.4 כמובן, אם קבוצה היא בעלת נפח אפס, בפרט היא בעלת מידה אפס.

דוגמא עבור $Z = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, ניקח מניה של האיברים:

$$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$$

כעת ניקח קוביה A_i שמכילה את x_i בנפח $\frac{\varepsilon}{2^i}$. אזי

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}\left(A_i\right) = \sum \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

מסקנה 0.5 כל קבוצה בת מניה הינה בעלת מידה אפס.

תרגיל כל תיבה Q אינה בעלת מידה אפס או נפח אפס.

מסקנה 0.6 (בינתיים)

1. אם Z בת מניה אזי Z ממידה אפס.
2. אם $Z_1 \subseteq Z_2$, וכן Z_2 ממידה אפס (נפח אפס), אזי Z_1 ממידה אפס (נפח אפס).
3. $Z = [a,b] \in \mathbb{R}$ אינה ממידה אפס. בתוך $\mathbb{R}^2$ כן.
4. אם Z בעלת נפח אפס במרחב $\mathbb{R}^n$ אזי Z חסומה (לא נכון לגבי מידה אפס).
5. עבור Z_i סדרה בת מניה של קבוצות בעלות מידה אפס, גם $\bigcup Z_i$ בעלת מידה אפס.
6. עבור Z_i סדרה סופית של קבוצות בעלות נפח אפס, גם $\bigcup Z_i$ בעלת נפח אפס.

הוכחה: (של מסקנה 5) לכל Z_i קיים כיסוי בן מניה $A_{i,1}, A_{i,2}, \ldots$ עבורו

$$\sum_j \text{vol} A_{i,j} < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

כמובן שכעת

$$\bigcup_{i,j} A_{i,j}$$

הוא כיסוי של $\bigcup Z_i$. כמו כן,

$$\sum_{i,j} \mathrm{vol}\left(A_{i,j}\right) < \sum_i \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

ולכן האיחוד ממידה אפס. ■

טענה 0.7 בהגדרה של מידה אפס ונפח אפס, ניתן לכסות על ידי תיבות סגורות או פתוחות (ישמש אותנו עוד רגע בהוכחת מסקנה 6).

הוכחה: נניח כי Z קבוצה שניתן לכסות על ידי קבוצות פתוחות A_i עם $\sum \mathrm{vol} A_i < \varepsilon$, כאשר יש כמות סופית או בת מניה של A_i. אזי ניקח לכל תיבה פתוחה A_i תיבה סגורה λA_i, עם נפח $\lambda^n \mathrm{vol} A_i$. זהו הבדל של קבוע, ולכן עדיין ניתן לכסות כרצוי. ■

הוכחה: (של מסקנה 6 מקודם) Z קומפקטי עם מידה אפס, וניקח כיסוי בן מניה של תיבות פתוחות עם נפח קטן מאשר ε. מקומפקטיות קיים לו תת כיסוי סופי עם מידה 0, $A_{i,1}, \ldots, A_{i,m}$ עבורו

$$\sum_{k=1}^{m} \mathrm{vol} A_{i,k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} A_{i,k} < \varepsilon$$

ולכן Z מנפח אפס. ■

דוגמא אם $f : Q_{a,b} \to \mathbb{R}$ רציפה אז הגרף $Z = \{(x, f(x))\}$ בעל נפח אפס. מסתבר שזה נכון גם אם f רק אינטגרבילית, בגלל שהגרף חסום בין סכום דרבו העליון והתחתון של f (הפרש שקטן כרצוננו כי f אינטגרבילית).