חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

© ארזים

6 בדצמבר 2016

1 אינטגרל רימן

1.1 סכומי רימן והגדרה ראשונית

הגדרה 1.1 בהנתן תיבה כלשהי Q, ובהנתן $f : Q \to \mathbb{R}$, לוקחים חלוקה $P = \{P_i\}$ של Q לתיבות קטנות יותר, ולוקחים נקודות מתאימות $\xi_i \in P_i$, ואז סכום רימן של f ביחס לחלוקה P עם הנקודות המתאימות $\{\xi_i\}$ הוא:

$$R\left(f, P, \{\xi_i\}\right) = \sum_i f\left(\xi_i\right) \mathrm{vol}\left(P_i\right)$$

אם נסמן $P = \{a_i \leq x_i \leq b_i\}$ תביה כלשהי, מגדירים גם $d\left(P\right) = \max_i\left(b_i - a_i\right)$, ואז העדינות של החלוקה $P = \{P_i\}$ היא

$$|P| = \max_i d\left(P_i\right)$$

הגדרה 1.2 בהינתן $f : Q \to \mathbb{R}$ מתיבה כלשהי, אזי I הוא אינטגרל רימן של f אם מתקיים

$$I = \lim_{|P| \to 0} R\left(f, P, \{\xi_i\}\right)$$

במובן הבא: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה P עם $|P| < \delta$ ולכל בחירה של נקודות מתאימות $\{\xi_i\}$, מתקיים

$$\left|R\left(f, P, \{\xi_i\}\right) - I\right| < \varepsilon$$

דוגמאות

1. אם f אינטגרבילית אזי f חסומה.
2. אם $f = c$ קבועה אזי f אינטגרבילית. נחשב את האינטגרל: נבחר חלוקה P כלשהי של Q, ונקבל, לכל בחירת נקודות מתאימות

$$R\left(f, P, \{\xi_i\}\right) = \sum_i f\left(\xi_i\right) \cdot \mathrm{vol}P_i = c\sum_i \mathrm{vol}P_i = c \cdot \mathrm{vol}Q$$

3. דוגמא נגדית: עבור $Q=[a,b]\subseteq R$, ניקח את פונקציית דיריכלה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

נפריד לשני מקרים אפשריים (יש יותר) - אם הנקודות המתאימות רציונאליות, אזי סכום רימן הוא בוודאי 0. אם הנקודות המתאימות אי רציונאליות, סכום רימן יהיה $|b-a|$. לכן בפרט אין גבול לסכומי רימן.

1.2 סכומי דרבו

בהנתן חלוקה $P=\{P_i\}$ של Q ופונקציה $f:Q\to\mathbb{R}$ חסומה, נגדיר

$$M_i=\sup_{P_i}f$$
$$m_i=\inf_{P_i}f$$

הגדרה 1.3 <u>התנודה</u> של f על הקוביה P_i היא

$$\omega\left(f,P_i\right)=M_i-m_i=\sup_{P_i}f-\inf_{P_i}f=\sup_{x,y\in P_i}\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|$$

הגדרה 1.4 <u>סכומי דרבו</u>, העליון והתחתון, בהתאמה, של f ביחס לחלוקה P, הם

$$S\left(f,P\right)=\sum_i M_i\mathrm{vol}\left(P_i\right)$$
$$s\left(f,P\right)=\sum_i m_i\mathrm{vol}\left(P_i\right)$$

כמובן מתקיים $s\left(f,P\right)\leq S\left(f,P\right)$.

טענה 1.5 לכל חלוקה P ולכל בחירת נקודות מתאימות $\{\xi_i\}$, מתקיים

$$s\left(f,P\right)\leq R\left(f,P,\{\xi_i\}\right)\leq S\left(f,P\right)$$

טענה זו מיידית.

הגדרה 1.6 נגדיר סדר חלקי על חלוקות: נגיד כי $P_1\leq P_2$, ואומרים כי P_2 עדינה יותר, אם מתקיים P_2 מכילה יותר מישורי חלוקה (ראינו את ההגדרה הזו בשיעור שעבר).

לא כל שתי חלוקות P_1,P_2 ניתנות להשוואה, אבל כן ניתן לבנות חלוקה נוספת $P_1\cup P_2$ שעדינה יותר מאשר P_1,P_2. כלומר

$$P_1\cup P_2\geq P_1,P_2$$

בונים אותה על ידי לקיחת חלוקה לפי כל מישורי החלוקה של P_1 או של P_2 (ממש איחוד).

טענה 1.7 1. נניח כי $P_1 \leq P_2$ שתי חלוקות של Q. אזי

$$s\left(f,P_1\right) \leq s\left(f,P_2\right) \leq S\left(f,P_2\right) \leq S\left(f,P_1\right)$$

2. לכל שתי חלוקות P_1, P_2 של Q, מתקיים

$$s\left(f,P_1\right) \leq S\left(f,P_2\right)$$

הוכחה:

1. נוכית עבור סכומי דרבו העליונים, הבדיקה עבור התחתונים דומה ותישאר כתרגיל. ניקח $P_i \in P_1$. אזי P_i תורמת לסכום $S\left(f,P_1\right)$ את האיבר $M_i \mathrm{vol} P_i$. בחלוקה העדינה יותר P_2, P_i מחולקת ליותר תיבות, שנסמנן $R_{i,j}$. אזי P_i תורמת לסכום $S\left(f,P_2\right)$ את

$$\sum_j \sup_{R_{i,j}} f \cdot \mathrm{vol} R_{i,j} \overset{R_{i,j} \subseteq P_i}{\leq} M_i \sum_j \mathrm{vol} R_{i,j} = M_i \mathrm{vol} P_i$$

לכן כל תיבה P_i של P_1 תורמת יותר לסכום $S\left(f,P_1\right)$ מאשר לסכום $S\left(f,P_2\right)$, ולכן $S\left(f,P_2\right) \leq S\left(f,P_1\right)$, כמו שרצינו.

2. ניקח $P = P_1 \cup P_2 \geq P_1, P_2$. מסעיף 1 נובע

$$s\left(f,P_1\right) \leq s\left(f,P\right) \leq S\left(f,P\right) \leq S\left(f,P_2\right)$$

■

הגדרה 1.8 תהי $f : Q \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של f, בהתאמה, הם

$$I^*\left(f\right) = \inf_P S\left(f,P\right)$$

$$I_*\left(f\right) = \sup_P s\left(f,P\right)$$

כמובן, תמיד מתקיים

$$I^*\left(f\right) \geq I_*\left(f\right)$$

משפט 1.9 תהי $f : Q \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. f אינטגרבילית רימן אם ורק אם $I^*\left(f\right) = I_*\left(f\right)$, ואז

$$I = \int_Q f = I^*\left(f\right) = I_*\left(f\right)$$

הוכחה: נניח כי f אינטגרבילית. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה P עם $|P| < \delta$ ולכל בחירת נקודות מתאימות $\{\xi_i\}$ מתקיים

$$I - \varepsilon < R\left(f, P, \{\xi_i\}\right) < I + \varepsilon$$

מהגדרת סכומי דרבו נובע שמתקיין

$$I - \varepsilon < s\left(f, P\right) \leq S\left(f, P\right) \leq I + \varepsilon$$

משום שלקחנו ε שרירותי מתקיים

$$I = I^*\left(f\right) = I_*\left(f\right)$$

בכיוון השני, נניח כי $I^*\left(f\right) = I_*\left(f\right)$. בשביל ההוכחה נראה קודם למה:

למה 1.10 תהי $f : Q \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. אזי

$$I^*\left(f\right) = \lim_{|P| \to 0} S\left(f, P\right)$$
$$I_*\left(f\right) = \lim_{|P| \to 0} s\left(f, P\right)$$

באותו מובן שהגדרנו גבול כזה עבור סכומי רימן, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $\delta_1, \delta_2 > 0$ כך שלכל חלוקה P עם $|P| < \delta_1$ מתקיים

$$S\left(f, P\right) - I^*\left(f\right) < \varepsilon$$

וכן לכל חלוקה P עם $|P| < \delta_2$ מתקיים

$$I_*\left(f\right) - s\left(f, P\right) < \varepsilon$$

הוכחה: ניתן להניח כי $f \geq 0$ בלי הגבלת הכלליות, כי f חסומה, ולכן על ידי הוספת הקבוע נוכל לקבל ממנה פונקציה חיובית.

נוכיח את החלק על $I^*\left(f\right)$, החלק השני דומה. נקח $\varepsilon > 0$, ואז מהגדרת האינפימום קיימת חלוקה P_1 עבורה

$$I^*\left(f\right) \leq S\left(f, P_1\right) \leq I^*\left(f\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

כעת נסמן $M = \sup_Q f > 0$, ונבחר

$$\delta = \frac{\varepsilon}{g}$$

נגדיר את g בעתיד. כעת, נבחר חלוקה P עבורה $|P| < \delta$ ונרצה להראות כי $|S(f,P) - I^*(f)| < \varepsilon$. את התיבות P_i של החלוקה P נחלק לשתי קבוצות:

$$A = \{P_i \in P \mid \exists P' \in P_1 . P_i \subseteq P'\}$$
$$B = P \backslash A$$

נעריך את הנפח הכולל של כל התיבות מתוך B. מותר לכל מישור חלוקה להתרחק מאלה של P_1 לכל היותר δ, בגלל העדינות. אם נסמן את הקצוות במימד i של התיבות בתור $a_i < b_i$, ובתור m_i את כמות המישורים שמחלקים במימד i, נקבל שנפח כל התיבות של B הוא לכל היותר

$$2\delta \left(\max_i |b_i - a_i|\right)^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k$$

כעת, נוכל לכתוב כעת נוכל סופסוף להגדיר את g:

$$g = 4M \left(\max_i |a_i - b_i|\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} m_k$$

ואז נוכל לחשב:

$$\begin{aligned} S(f,P) &= \sum_i M_i \mathrm{vol} P_i = \sum_{P_i \in A} M_i \mathrm{vol} P_i + \sum_{P_i \in B} M_i \mathrm{vol} P_i \le \\ &\le S(f,P_1) + M \cdot \sum_{P_i \in B} \mathrm{Vol} P_i = I^*(f) + \frac{\varepsilon}{2} + 2\delta \cdot M \cdot \left(\max_i |a_i - b_i|\right)^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k = \\ &= I^*(f) + \varepsilon \end{aligned}$$

ולכן סיימנו. ■

כעת נסמן $I^*(f) = I_*(f) = I$, ואז נקבל

$$\lim_{|P|} S(f,P) = I = \lim_{|P|} s(f,P)$$

כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|P| < \delta$ אז בהכרח מתקיים

$$I - \varepsilon < s(f,P) < S(f,P) < I + \varepsilon$$

כמובן, לכל בחירת נקודות מתאימות $\{\xi_i\}$ מתקיים

$$I - \varepsilon < s(f,P) < R(f,P,\{\xi_i\}) < S(f,P) < I + \varepsilon$$

לכן מהגדרת אינטגרל רימן,

$$I = \int_Q f$$

■

מסקנה 1.11 תהי $f : Q \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. f אינטגרבילית אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P עבורה

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

מסקנה זו ישירה מהמשפט הקודם.

1.3 תכונות של פונקציות אינטגרביליות

1. ראינו כבר כי

$$\int_Q c = c \cdot \mathrm{vol} Q$$

2. מתקיים גם, עבור f, g אינטגרביליות,

$$\int_Q f + \int_Q g = \int_Q f + g$$

3. עבור f, g אינטגרביליות גם $f \cdot g$ אינטגרבילית. הרי מתקיים

$$|fg(x) - fg(y)| = |f(x) g(x) - f(x) g(y) + f(x) g(y) - f(y) g(y)| \leq$$
$$\leq |\sup f| |g(x) - g(y)| + |\sup g| |f(x) - f(y)|$$

ומכאן, יחד עם המסקנה מהמשפט האחרון, נוכל לחסום את התנודה של fg על ידי התנודות של f, g, שהן קטנות (כי הן אינטגרביליות).

4. תרגיל - אם f אינטגרבילית אזי $|f|$ אינטגרבילית ומתקיים

$$\left| \int_Q f \right| \leq \int_Q |f|$$

רמז: אי שוויון המשולש ההפוך.

5. תרגיל - אם f, g אינטגרביליות אזי גם $\max(f, g), \min(f, g)$ אינטגרביליות.

6. אם $f \le g$ אינטגרביליות אזי

$$\int\limits_Q f \le \int\limits_Q g$$

7. אם f אינטגרבילית על Q, $P \subseteq Q$ תת תיבה, אזי f אינטגרבילית גם על P. ניתן לעשות זאת על ידי הוספת הפאות של P בתור מישורי חלוקי לכל חלוקה של Q, וזה רק יקטין את התנודה.

8. תרגיל - אם Q מחולקת לתתי תיבות P_i, וכן f אינטגרבילית על כל P_i, אזי f אינטגרבילית על Q.

9. אם f רציפה על Q אזי היא אינטגרבילית עליו (רמז: משפט קנטור אומר כי f רציפה במידה שווה על Q).