חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

ארזים ©

10 בדצמבר 2016

בשיעורים קודמים דיברנו על הנורמה האופרטורית של A:

$$||A|| = \max_{|x|=1} |Ax| = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^*A\right)}$$

נראה כעת שוב את השוויון האחרון בעזרת כופלי לגראנז'. נגדיר

$$f\left(x\right) = \left\langle A^*Ax, x\right\rangle = \left\langle Ax, Ax\right\rangle = \left|Ax\right|^2$$

זו פונקציית המטרה. נסמן מעתה $M = A^*A$, שהיא סימטרית כמובן. האילוץ יהיה $g\left(x\right) = \left\langle x, x\right\rangle - 1$, כלומר יכריח אותנו להסתכל על ספירת היחידה.
ממשפט כופלי לגראנז', קיים λ עבורו $\nabla = \lambda \nabla g$ בנקודת המקסימום.
מתקיים כמובן

$$Df\left(h\right) = \left\langle \nabla f, h\right\rangle$$

לכן נחשב את $Df\left(h\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(x+h\right) - f\left(x\right) &= \left\langle M\left(x+h\right), x+h\right\rangle - \left\langle Mx, x\right\rangle = \\ &= \left\langle Mx, x\right\rangle + \left\langle Mx, h\right\rangle + \left\langle Mh, x\right\rangle + \left\langle Mh, h\right\rangle - \left\langle Mx, x\right\rangle = \\ &\overset{*}{=} 2\left\langle Mh, x\right\rangle + o\left(h\right) \end{aligned}$$

השוויון * נובע מכך שהמטריצה M סימטרית. לכן נקבל $D_x f\left(h\right) = 2\left\langle Mx, h\right\rangle$, כלומר בהכרח $\nabla_x f = 2Mx$. כמו כן, ברור כי $\nabla_x g = 2x$. לכן מתקיים בנקודת המקסימום עבור λ כלשהו

$$Mx = \lambda x$$

לכן λ ערך עצמי של M, וכן x וקטור עצמי. M סימטרית, לכן קיים בסיס אורתונומלי של וקטורים עצמיים שלה.
נחזור להסתכל על $f\left(x\right)$:

$$f\left(x\right) = \left\langle Mx, x\right\rangle = \lambda\left\langle x, x\right\rangle = \lambda$$

נשים לב שקיבלנו בדיוק את מה שרצינו - מהמשפט המקסימום תחת האילוצים מתקבל בנקודה x כלשהי, וראינו כי x וקטור עצמי עם ערך עצמי λ. אבל קיבלנו $\lambda = f\left(x\right)$ וזהו λ המקסימלי תחת האילוץ, ולכן זהו הערך העצמי הגדול ביותר של M.

אם כן, סיימנו את פרק הדיפרנציאביליות.

1 אינטגרל רימן

נחפש דרך להכליל את האינטגרל הרגיל שלנו למרחב $\mathbb{R}^n$. נלמד על אינטגרל באמצעות תיבות וסכומי רימאן, ונמשיך מאוחר יותר למידת ז'ורדן.

הגדרה 1.1 עבור $a = \left(a_1, \ldots, a_n\right), b = \left(b_1, \ldots, b_n\right)$, נסמן

$$Q_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$$

זוהי תיבה בתוך $\mathbb{R}^n$.

"תיבת נוח, כפי שרימאן ציווה עלינו" -המרצה.

הגדרה 1.2 נגדיר חלוקה של תיבה Q להיות $P = \{P_i\}_{i=1}^k$ כך שמתקיים

$$Q = \bigcup_{i=1}^k P_i$$

וגם $\mathrm{Int}\left(P_i\right) \cap \mathrm{Int}\left(P_j\right) = \emptyset$ לכל $i \neq j$.

הגדרה 1.3 נסמן

$$\mathrm{vol}\left(Q_{a,b}\right) = \prod_{i=1}^n \left|b_i - a_i\right|$$

כמו כן נגדיר $d\left(Q_{a,b}\right) = \max_i \left|b_i - a_i\right|$.

הגדרה 1.4 נגדיר יחס סדר חלקי של חלוקות: $P_1 \leq P_2$ אם P_2 עידון של P_1. נגדיר מפורשות: $P_1 \leq P_2$ אם לכל תיבה $P \in P_2$ קיימת ויחידה תיבה $R \in P_1$ עבורה $\mathrm{Int}\left(P\right) \subseteq R$.

מסקנה 1.5 עבור אותן $P \in P_2, R \in P_1$ מתקיים $\mathrm{vol}P \leq \mathrm{vol}R$, $d\left(P\right) \leq d\left(R\right)$.

הגדרה 1.6 תהי $f : Q_{a,b} \to \mathbb{R}$, ותהי P חלוקה של $Q_{a,b}$. נבחר באקראי נקודה ξ_i על כל תיבה $P_i \in P$ ונגדיר את סכום רימן להיות

$$R\left(f, P, \{\xi_i\}\right) = \sum_i f\left(\xi_i\right) \cdot \mathrm{vol}\left(P_i\right)$$

הגדרה 1.7 נאמר כי $f:Q_{a,b}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית (לפי רימאן) ובעלת אינטגרל I אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P של $Q_{a,b}$ עם $\max_i d\left(P_i\right)<\delta$ ולכל בחירה של נקודות מתאימות $\{\xi_i\}$ מתקיים

$$\left|R\left(f,P,\{\xi_i\}\right)-I\right|<\varepsilon$$

בדיוק מה שציפינו לראות אחרי חדו"א 2. נסמן במקרה של אינטגרביליות:

$$I=\int\limits_{Q_{a,b}} f\,\mathrm{d}x=\int\limits_{Q_{a,b}} f\left(x\right)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n$$

הערה 1.8 למעשה לרוב נרצה לומר

$$I=\lim_{\max_i d(P_i)\to 0} R\left(f,P,\{\xi_i\}\right)$$

בשבוע הבא נראה, בין היתר, כי אם f אינטגרבילית, אזי היא בהכרח חסומה.