חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

2 בנובמבר 2016

1 חזרה

הגדרה 1.1 יהי V מרחב וקטורי. פונקציה $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_+$ נקראת נורמה אם מתקיים:

1. $||v|| \geq 0$ וכן $||v|| = 0 \iff v = 0$.
2. $||\lambda v|| = |\lambda| \, ||v|| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$.
3. אי שוויון המשולש: $||v+w|| =\leq ||v|| + ||w|| \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$.

כל מרחב וקטורי ממשי סוף מימדי מקיים $V \cong \mathbb{R}^{\dim V}$. יש לנו מבנה של מכפלה פנימית:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

והיא מגדירה על $\mathbb{R}^n$ נורמה:

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

תרגיל הראו כי $|\cdot|$ מקיימת את הדרישות מנורמה.

דוגמאות נוספות לנורמות של $\mathbb{R}^n$:

1.

$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

2.

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

3.

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

1.1 התכנסות

הגדרה 1.2 תהי $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ סדרת נקודות. נאמר שהיא מתכנסת אם מתקיימים התנאים הבאים (כולם שקולים):

1. התכנסות בכל רכיב: $x_n \to x$.
2. התכנסות בנורמה האוקלידית: $|x_n - x| \to 0$.
3. התכנסות בנורמה כלשהי: $||x_n - x|| \to 0$.

משפט 1.3 בתוך $\mathbb{R}^d$, כל הנורמות שקולות, כלומר לכל $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ נורמות קיימים שני קבועים $c, C > 0$ כך שלכל ווקטור $v \in \mathbb{R}^d$ מתקיים

$$c\,||v||_2 \le ||v||_1 \le C\,||v||_2$$

הוכחה: נוכיח שכל נורמה שקולה לנורמה האוקלידית. ראשית, נראה כי נורמה היא רציפה. ניקח סדרה $\{x_n\}$ שמתכנסת לנקודה x. כל x נוכל לפרוש על ידי הבסיס $e_1, \ldots, e_n$, ולכתוב:

$$\begin{aligned} ||x|| &= \left|\left|\sum_{i=1}^d x_i e_i\right|\right| \le \sum_{i=1}^d ||x_i e_i|| = \sum_{i=1}^d |x_i|\,||e_i|| \le \\ &\le M\sum_{i=1}^d |x_i| \end{aligned}$$

כאשר

$$M = \max_i ||e_i||$$

כעת, לכל $x \in \mathbb{R}^d$, מתקיים

$$||x|| \le M\sum_{i=1}^d |x_i| = M\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \right\rangle \le M\sqrt{d}\,|x|$$

כעת נוכל לרשום

$$||x_n - x|| \le M\sqrt{d}\,|x_n - x| \to 0$$

ולכן קיבלנו רציפות של כל נורמה.
כעת, נסמן את ספירת היחידה:

$$S^{d-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = 1\right\}$$

קבוצה זו היא קומפקטית (סגורה וחסומה). ממשפט ווירשטראס, ומכך שנורמה היא רציפה, היא מקבלת ערך מקסימלי ומינימלי על ספירת היחידה (הקומפקטית). נסמנם m, M בהתאמה. לכן, לכל ווקטור v המקיים $|v| = 1$, מתקיים

$$m \leq ||v|| \leq M$$

מווקטור כלשהו, x, נוכל ליצור $w = \frac{x}{|x|}$ שמקיים $|w| = 1$. לכן מתקיים

$$\begin{aligned} m \leq & \quad ||w|| & \leq M \\ m \leq & \quad \left|\left|\frac{x}{|x|}\right|\right| & \leq M \\ m \leq & \quad \frac{||x||}{|x|} & \leq M \\ m\,|x| \leq & \quad ||x|| & \leq M \end{aligned}$$

וזו השקילות שרצינו. ■

הערה 1.4 במרחבים בעלי מימד אינסופי יש נורמות לא שקולות.

1.2 נורמות של מטריצות/אופרטורים

הערה 1.5 כל הנורמות על מרחב המטריצות שקולות.

הגדרה 1.6 תהי A מטריצה, כלומר העתקה לינארית. נגדיר את <u>הנורמה האופרטורית</u> של A להיות:

$$||A|| := \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \max_{|x|=1} |Ax|$$

תרגיל הוכיחו כי נורמה זו מקיימת את תכונות הנורמה.

מההגדרה, נובע שיש חסם עליון לערך מוחלט:

$$|Ax| \leq ||A||\,|x|$$

נשים לב כי נורמה זו <u>מולטיפליקטיבית</u>:

$$||AB|| \leq ||A||\,||B||$$

נרצה למצוא ביטוי נח יותר לנורמה:

$$||A|| = \max_{|x|=1} \sqrt{\langle Ax, Ax \rangle} = \max_{|x|=1} \sqrt{\langle A^*Ax, x \rangle} = \max_{|y|=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2}$$

זאת משום שהמטריצה A^*A היא תבנית ריבועית, שמאלגברה לינארית ידוע לנו שניתן ללכסן אותה - לעבור מערכת קואורדינטות כדי לקבל את שהראינו. נציין כי λ_i הם הערכים העצמיים של A^*A.

$$||A|| = \max_{|y|=1}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2} = \sqrt{\max_{1\le i\le n}\lambda_i}$$

נסמן

$$\max_{1\le i\le n}\lambda_i = \lambda_{\max}$$

ונקבל כי

$$||A|| = \sqrt{\lambda_{\max}}$$

קיימות נורמות נוספות על מרחב המטריצות, למשל נורמת הילברט־שמידט:

$$||A||_{HS} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|a_{i,j}|^2} = \sqrt{\mathrm{tr}\left(A^T A\right)}$$

תרגיל האם $||\cdot||_{HS}$ מולטיפליקטיבית?

בקורס זה אנחנו נדבר על העתקות (maps):

$$F : U \to \mathbb{R}^m$$

כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (הרבה פעמים תחום - קבוצה פתוחה וקשירה), כאשר מתקיים

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x \in U \mapsto y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

את הפונקציה F ניתן לכתוב בתור m פונקציות, $F_1, \ldots, F_m$, שמקיימות

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1(x) \\ &\vdots \\ y_n &= F_n(x) \end{aligned}$$

הגדרה 1.7 פונקציה F תיקרא דיפרנציאבילית בנקודה $x_0 \in U$ אם קיימת העתקה לינארית $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ המקיימת לכל h:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = L(h) + o(|h|)$$

L נקראת הדיפרנציאל של F בנקודה x_0. סימון:

$$L = D_{x_0} F = F_*$$

נבהיר את הסימון $o(|h|)$:

$$o(|h|) = |h| \cdot \alpha(h)$$

כאשר מתקיים

$$\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$$

לחילופין ניתן להגדיר $\alpha(h) = 0$, ואז לדרוש כי α רציפה בנקודה 0.
כעת, נניח כי F דיפרנציאבילית בנקודה x_0. נבחר $h = tv, t \in \mathbb{R}_+$, ונציב בהגדרה:

$$\begin{aligned}
F(x_0 + tv) - F(x_0) &= L(tv) + \alpha(tv) \cdot t|v| \\
F(x_0 + tv) - F(x_0) &= tL(v) + \alpha(tv) \cdot t|v| \\
\frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t} &= L(v) + \alpha(tv) \cdot |v|
\end{aligned}$$

הגדרה 1.8 הנגזרת לפי וקטור כלשהו v של הפונקציה F בנקודה x_0 היא:

$$L_v F = \lim_{t \searrow 0} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t}$$

כעת מתקיים למעשה

$$L_v F = D_{x_0} F(v)$$

מסקנה 1.9 אם F דיפרנציאבילית בנקודה x_0, אזי F גזירה לפי כל וקטור v.

אם נבחר את v להיות וקטור בסיס e_i, נקבל

$$L_{e_i} F = \lim_{t \searrow 0} \frac{F(x_0 + te_i) - F(x_0)}{t} = \frac{\partial}{\partial x_i} F(x_0)$$

בסך הכל נוכל להסיק כי אם F דיפרנציאבילית בנקודה x_0, כל הנגזרות החלקיות של F בנקודה x_0 קיימות. עם זאת, הגרירה בכיוון ההפוך לא נכונה - אפילו אם כל הנגזרות הכיווניות קיימות, לאו דווקא יש דיפרנציאביליות.

נרצה לדון קצת יותר בדיפרנציאל עצמו. נניח כי F דיפרנציאבילית בנקודה x_0. כיצד נתאר את המטריצה $D_{x_0}F$?

התשובה פשוטה: העמודה מספר i של המטריצה היא למעשה הנגזרת החלקית מספר i, כלומר

$$D_{x_0}F = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$$

כאשר $j \in \{1,\ldots,n\}$, $i \in \{1,\ldots,m\}$.