טורי חזקות

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ - נתרכז במקרה $x_0=0$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

משפט אבל - לכל טור חזקות $\sum a_k x^k$ קיים מספר $R\in[0,\infty]$ - רדיוס ההתכנסות של הטור, כך שבתחום $\{|x|<R\}$ הטור מתכנס ובתחום $\{|x|>R\}$ הטור מתבדר.

בנוסף הטור מתכנס במ"ש בכל תת קטע סגור $(-A,A)$ עבור $A<R$

משפט קושי הדמר - $\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}(|a_n|)^{\frac{1}{n}}$

משפט דלמבר - $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

דוגמאות -

1) $\sum \frac{x^k}{k!}$, $a_k=\frac{1}{k!}$, $\frac{a_k}{a_{k+1}}=k+1 \xrightarrow{k\to\infty} \infty \Leftarrow R=\infty$

2) $\sum k!\,x^k$, $a_k=k!$, $\sqrt[k]{k!} \xrightarrow{k\to\infty} \infty \Leftarrow R=0$

3) $\sum \frac{x^k}{k}$, $a_k=\frac{1}{k}$, $\sqrt[k]{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} 1 \Leftarrow R=1$

משפט - $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מתכנס ברדיוס $R>0$, אזי לכל $x\in(-R,R)$:

1) $f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

2) $\int_0^x f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}x^{k+1}$

והטורים הנ"ל בעלי אותו רדיוס התכנסות

מסקנה - f גזירה ב- $(-R,R)$ אינסוף פעמים ו- $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

דוגמאות -

1) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k=\frac{1}{1-x}$, $|x|<1$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$, $|x|<1$

3) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}=e^x$, $\mathbb{R}$

4) $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}=\log(1-x)$, $[-1,1)$

5) $\sin x=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, $\mathbb{R}$

6) $\frac{1}{1-(-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$, $|x|<1$

7) $\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$, $|x|\le 1$

Scanned by CamScanner

תרגיל: מצאו ביטוים סגורים לפונקציות הבאות:

1) $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!}$

$$e^{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+3}}{(n+3)!} + 1 + (x+2) + \frac{(x+2)^2}{2!} =$$

$$= (x+2)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!} + 1 + (x+2) + \frac{(x+2)^2}{2!}$$

2) $S(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2n+1}$

$(|x|<1)$ $S'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$

מוצאים פונקציה קדומה ונקבל $S(x) = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

3) $S(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = x(1+2x+3x^2+\dots) =$

$$= x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

קצה רדיוס התכנסות

משפט - יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור עם התכנסות $0<R<\infty$. התנאים הבאים שקולים:

1) הטור מתכנס ב- $x=R$
2) הטור מתכנס במ"ש ב- $[0,R)$
3) " - ב- $[0,R]$

מסקנה - אם הטור מתכנס ב- $x=R$ אזי $\lim_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$

דוגמה - ראינו - $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$

הטור מתכנס ב- $|x|<1$ ואם נציב נראה שגם בנק' $x=1$

לפי המשפט, הטור מתכנס במ"ש ב- $[0,1]$. מה שאומר ש-

$$\log 2 = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

תרגיל - נוכיח $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots\right)$

ראינו - $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1}$

הטור מתכנס בנק' $x=1$ $\longleftarrow$ מתכנס במ"ש ב- $[0,1]$. בפרט:

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \lim_{x\to 1^-} \sum \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Scanned by CamScanner