תרגול

משפט - החלפת גבול ואינטגרל

תהיינה $f_n \in R[a,b]$, $f:[a,b]\to \mathbb{R}$

ונניח $f_n \xrightarrow{u} f$. אזי: $f\in R[a,b]$:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

תרגיל

$f_n(x) = xn^\alpha \cdot e^{-nx}$ ב- $[0,1]$

1) עבור אילו ערכי α $\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש?

2) עבור אילו ערכי α מותר להחליף גבול ואינטגרל.

פיתרון

1) $f_n(x) \longrightarrow 0$ לכל $x\in[0,1]$, נקודתית

עכשיו התכנסות במ"ש:

$$f_n'(x) = n^\alpha\left(e^{-nx} + x\cdot(-n)\cdot e^{-nx}\right) \overset{?}{=} 0$$

$$\longmapsto x = \frac{1}{n}$$

$f_n(0)=0$, $f_n(1)=\frac{n^\alpha}{e^n}$, $f_n(\frac1n)=\frac{n^{\alpha-1}}{e}$, $x_{max}=\frac{1}{n}$

נבדוק עבור אילו ערכי α מתקיים:

$$|f_n(\tfrac1n)| \longrightarrow 0$$

וזה קורה אמ"מ $\alpha<1$.

2)

$$n^\alpha\int_0^1 x\cdot e^{-nx}dx = n^\alpha\int_0^1 x\cdot\left(\frac{e^{-nx}}{-n}\right)'dx =$$

$$= n^\alpha\left[\left(x\cdot\frac{e^{-nx}}{-n}\right)\Big|_0^1 + \frac1n\int_0^1 e^{-nx}dx\right] =$$

$$= n^\alpha\left[-\frac{1}{ne^n} + \frac1n\cdot\left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1\right] = n^\alpha\left(-\frac{1}{ne^n} + \frac1n\left[\frac1n - \frac{1}{ne^n}\right]\right)$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{אמ"מ} \quad \alpha<2$$

* התנאי במשפט הוא "מספיק" אבל לפעמים התנאי הזה לא מתקיים ועדיין ניתן להחליף בין הגבול לאינטגרל.

* אך בקרון, התכנסות במ"ש אינה תנאי מספיק.

לדוגמא:

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac1n & ,\ x\in[0,n]\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

משפט המג'ורנטה: ונניח $f_n:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ שהן אינט' בכל תת קטע סגור וחסום ושלכל n $\int_a^\omega f_n(x)dx$ מתכנס.

תהי: $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ונניח $f_n \xrightarrow{u} f$ בכל תת קטע קומפקטי (סגור וחסום)

כמו כן תהי $\psi:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ אינט' על כל תת קטע קומפקטי כך ש- $|f_n|\le\psi$ לכל n,

ו- $\int_a^\omega \psi(x)dx$ מתכנס.

אזי $f\in R[a,b]$ לכל $b<\omega$, האינטגרל הלא אמיתי של f ב- $[a,\omega)$ מתכנס:

$$\int_a^\omega f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^\omega f_n(x)dx \le \int_a^\omega \psi(x)dx$$

תרגיל

תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה וחסומה. הוכיחו:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^\infty e^{-nx} f(x)dx = f(0)$$

פיתרון

נסמן $|f|\le K$ $\leftarrow$ $|e^{-nx}f(x)|\le Ke^{-nx}$

האינטגרל של $e^{-nx}f(x)$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס

$$\int_0^\infty e^{-nx}f(x)dx = \int_0^\infty e^{-y} f(y/n)\frac{dy}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^\infty e^{-nx}f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-y}f(y/n)dy = \lim_{t\to0^+}\int_0^\infty e^{-y}f(ty)dy$$

תהי $0<\alpha_n\to0$. נגדיר $f_n(y)=e^{-y}f(\alpha_n y)$

$g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad g(y)=e^{-y}\cdot f(0)$

~~יהי $b>0$ ... $g(y)\le|f(\alpha_n y)|$ ... $f(0)$ ...~~

יהי $b>0$:
$$\sup_{y\in[0,b]}|f_n(y)-g(y)|\le\sup_{y\in[0,b]}|f(\alpha_n y)-f(0)|\to0$$

לכן $f_n \xrightarrow{u} g$

יהי $\varepsilon>0$, נמצא n כך ש- $0<\alpha_n y<\varepsilon$ לכל $y\in[0,b]$

$$|f_n(y)|=e^{-y}\cdot|f(\alpha_n y)|\le\underbrace{K\cdot e^{-y}}_{\psi}$$

ממשפט המצורעת:
$$\int_0^\infty e^{-y}f(\alpha_n y)dy \longrightarrow \int_0^\infty e^{-y}f(0)dy = f(0)$$

משפט - החלפת גבול ונגזרת

תהיינה $g,f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך ש- $f_n\in C^1[a,b]$
ונניח: 1) קיימת נק' $x_0\in[a,b]$ כך ש- $f_n(x_0)$ מתכנסת
2) $f_n' \xrightarrow{u} g$

אזי: קיימת פונ' $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך ש- $f'=g$ וכן $f_n \xrightarrow{u} f$ ב-$[a,b]$

דוגמה - $f_n(x)=\dfrac{\arctan(x^n)}{n}$ הוכיחו מתכנסת במ"ש ב-$[0,\infty)$
אבל f_n' לא מתכנסת נקודתית ל- f'

$|f_n(x)|\le\frac{\pi}{n}\to0 \Leftarrow f_n\xrightarrow{u}0$

$f_n'(x)=\frac{1}{n(1+x^{2n})}\cdot nx^{n-1}$, $f_n'(1)=\frac12\longrightarrow\frac12\ne0$