סדרות של פונקציות

התכנסות נקודתית

$f_n : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$

הגדרה - נאמר כי f_n מתכנסת נקודתית בנק' $x \in X$ אם הסדרה $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה מתכנסת.

אם $\{f_n\}$ מתכנסת בכל נקודה ב-X נאמר $\{f_n\}$ מתכנסת נק' ב-X.

נסמן:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) : X \to \mathbb{R}$$

דוגמאות

1) $f_n(x) = \frac{x}{n}$ ב- $\mathbb{R}$

$$\forall x\in\mathbb{R} .\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$$

לכן $f_n \longrightarrow 0$ ב- $\mathbb{R}$

2) $g_n(x) = x^{-n}$ ב- $\mathbb{R}/\{0\}$

$$|x|>1 : \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x|^n} = 0$$

$$x = 1 : g_n(x) \longrightarrow 1$$

$x = -1 :$ $g_n(x)$ - לא מתכנסת

$0<x<1 :$ $g_n(x) \longrightarrow \infty$ (לא מתכנסת)

אז $\{g_n\}$ מתכנסת נקודתית ל:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

(בקטע $\{1\}\cup\{|x|>1\}$)

התכנסות במידה שווה

הגדרה - תהי $f_n : X\to\mathbb{R}$ סדרה של פונקציות.
נאמר ש- f_n מתכנסת במידה שווה בתחום X אם קיימת $f : X\to\mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq N$:

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

כלומר לכל $x\in X$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

נסמן $f_n \xrightarrow{u} f$ ב- X

הערה - התכנסות במ"ש ל- f $\Longrightarrow$ התכנסות נ"ק ל- f (אבל לא להיפך!)

דוגמה - חשובה $f_n(x) = x^n$ ב- $[-0.5, 0.5]$

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} |x^n| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Rightarrow f_n \to 0 \text{ נקודתית ב-} [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]$$

$$\sup_{x\in[-0.5,0.5]} |f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

אז לכל $\varepsilon>0$ אפשר למצוא N כך שלכל $n\geq N$
$|f_n(x)| < \varepsilon$ לכל x בתחום. לכן $f_n \xrightarrow{u} 0$ ב-$[-0.5, 0.5]$

שלילת התכנסות במידה שווה: $f_n \not\xrightarrow{u} f$ אם:

$$\exists(\varepsilon>0).\forall(N\in\mathbb{N}).\exists(n>N).\exists(x\in X).[|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon]$$

דוגמה - $f_n(x)=x^n$ ב- $[0,1]$

התכנסות נקודתית: $f_n(x)\to f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$

נראה שאין התכנסות במ"ש ב- $[0,1]$

נסתכל על $x_n=1-\frac{1}{n}\in[0,1]$

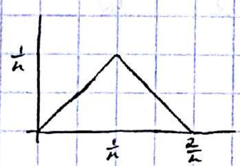
$$f_n(1-\tfrac{1}{n})=(1-\tfrac{1}{n})^n\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{e}$$

אבל $f(x_n)=0$

עבור $\varepsilon=\frac{1}{2e}$ קיים N כך שלכל $n>N$

$$f_n(1-\tfrac{1}{n})>\varepsilon=\frac{1}{2e}\Rightarrow\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\ge|f_n(x_n)-0|=|f_n(x_n)|>\varepsilon$$

דוגמה - f_n ב- $[0,1]$ מוגדרת באופן הבא:



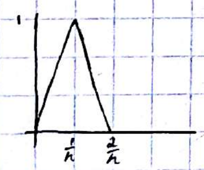
התכנסות נקודתית: $f_n\to 0$

נבדוק התכנסות במ"ש: $\underbrace{\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|}_{\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0}\overset{?}{\xrightarrow{n\to\infty}}0$

אז יש התכנסות במידה שווה:

$$f_n(x)\xrightarrow{u}f(x)$$

דוגמה - $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ באופן הבא:



התכנסות נקודתית: $f_n\to 0$

התכנסות במ"ש - $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-\underset{0}{f(x)}|\ge f_n(\frac{1}{n})=1\not\to 0$

אז $f_n\not\xrightarrow{u}0$

דוגמה - $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$ ב- $[0,1]$

עבור $x=0,1$ $\forall n.\ f_n(x)=0$

$x\in(0,1)$ $x^n\to 0$

$\Downarrow$

אז $f_n\to 0$ ב- $[0,1]$ $\Leftarrow$ $f_n(x)\to 0$

$$f_n'(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n\overset{?}{=}0$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x=0,\ x=\frac{n}{n+1}$ (גם $x=1$ מועמד לקיצון)

נשים לב ש- $f_n(\frac{n}{n+1})\xrightarrow{n\to\infty}0$

אז $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|\le f_n(\frac{n}{n+1})\xrightarrow{n\to\infty}0$

תרגיל - $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות

נניח $f_n \xrightarrow{u} f$ ב- $[a,b)$

נניח בנוסף $f_n(b)$ סדרה מתכנסת לערך שנסמן $f(b)$

אזי $f_n \xrightarrow{u} f$ ב- $[a,b]$

הוכחה - יהי $\varepsilon>0$.

מההגדרה נובע שיש N_1 כך שלכל $n\geq N_1$ מתקיים:

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (\forall x\in[a,b))$$

כמו כן קיים N_2 כך שלכל $n\geq N_2$

$$|f_n(b)-f(b)|<\varepsilon$$

לכן עבור $N=\max\{N_1,N_2\}$ נקבל לכל $n\geq N$:

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (\forall x\in[a,b])$$

כלומר $f_n \xrightarrow{u} f$ ב- $[a,b]$

הגדרה - F משפחה של פונקציות המוגדרות כולן על קבוצה A.

נאמר ש- F חסומה במידה אחידה ע"י M אם:

$$\forall(f\in F).\ \forall(x\in A).\ [\,|f(x)|<M\,]$$

תרגיל - תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות ב- A.

נניח $f_n \xrightarrow{u} f$ ב- A

1) הוכיחו כי אם f_n חסומות כל אחת בנפרד, כלומר $|f_n|<M_n$,

אז f חסומה

הוכחה - עבור $\varepsilon=1$,

$f_n \xrightarrow{u} f \Leftarrow$ קיים N_0 כך ש- $|f_{N_0}(x)-f(x)|<1$ לכל $x\in A$

נזכור $f_{N_0}(x)\leq M_{N_0}$ לכל $x\in A$

ולכן

$$\forall x\in A.\quad -M_{N_0}-1\leq f(x)\leq M_{N_0}+1$$

2) נניח שההתכנסות היא נקודתית בלבד

הוכיחו שאם $\{f_n\}$ חסומה במידה אחידה ב- A ע"י M

אזי $|f(x)|\leq M$ לכל $x\in A$

הוכחה - נובע מכך שאי שיוויון חלש נשמר בגבול

3) הוכיחו כי אם $|f(x)|<M_0$ לכל $x\in A$ אזי קיים N

כך ש- $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$ ח"במ"א.

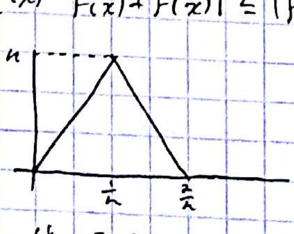
האם התכנסות במ"ש נחוצה?

הוכחה - $f_n \xrightarrow{u} f$ לכן קיים N כך שלכל $n\geq N$ $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in A$

$$|f_n(x)|=|f_n(x)-f(x)+f(x)|\leq|f_n(x)-f(x)|+|f(x)|\leq\varepsilon+M_0$$

ההתכנסות במ"ש נחוצה. לדוגמה:

(וודאו!)



4) הוכיחו כי אם f_n חסומות כל אחת בנפרד אז $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ חב"ש.

תרגיל - $f_n(x)=1+x+\dots+x^n$ ב- $(-1,1)$

חקרו התכנסות במ"ש של $\{f_n\}$

פיתרון -

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-x}=f(x)$$

נשים לב $|f_n(x)|\le n+1$

אבל f לא חסומה ב- $(-1,+1)$, ואז f_n לא מתכנסת במ"ש.

תרגיל -

$$\left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{u} f \\ g_n \xrightarrow{u} g \end{array}\right\} \Rightarrow f_n+g_n \xrightarrow{u} f+g$$

פיתרון - יהי $\varepsilon>0$. נמצא N כך שלכל $n\ge N$

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\ , \quad |g_n(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x.$$

לכן עבור $n\ge N$:

$$|f_n(x)+g_n(x)-(f(x)-g(x))|\le|f_n(x)-f(x)|+|g_n(x)-g(x)|<\varepsilon.$$

(לכל x).

תרגיל ממבחן - $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ גזירות

נתון לכל n $|f_n'(x)|\le 1$

ולכל $x\in[0,1]$ $f_n\to f$ נקודתית.

הוכיחו $f_n \xrightarrow{u} f$

הוכחה - ממשפט לגראנז', לכל n לכל $y,x\in[0,1]$ $|f_n(x)-f_n(y)|\le|x-y|$

אז ניקח גבול $n\to\infty$ - $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$

יהי $\varepsilon>0$.

נבחר $\frac{\varepsilon}{3}<M$ שלם.

נסמן $x_k=\frac{k}{M}$ כאשר $k=0,1,\dots M$

לכן לכל $x\in[0,1]$ קיים $0\le k\le M$ כך ש- $|x-x_k|\le\frac{\varepsilon}{3}$

כמו כן, $f_n(x_k)\to f(x_k)$ לכן קיים N_k כך שלכל $n\ge N_k$:

$|f_n(x_k)-f(x_k)|<\frac{\varepsilon}{3}$

יהי $x\in[0,1]$. נמצא k כנ"ל

$$|f_n(x)-f(x)|\le|f_n(x)-f_n(x_k)|+|f_n(x_k)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(x)|$$

עבור $n>\max\{N_0,\dots N_M\}$ מתקיים:

$|f_n(x_k)-f(x_k)|<\frac{\varepsilon}{3}$

מתנאי ליפשיץ

$|f_n(x_k)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$

$|f(x_k)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$

ולכן -

$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

קריטריון קושי להתכנסות במ"ש

$f_n : A \to \mathbb{R}$

$\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש ב-A $\iff$ $\forall(\varepsilon>0).\ \exists(N\in\mathbb{N}).\ \forall(n,m>N).\ \forall(x\in A).\ [|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon]$

משפט - תהיינה $f_n : D \to \mathbb{R}$ רציפות ב-x_0
נניח $f_n \xrightarrow{u} f$ $\Leftarrow$ f רציפה ב-x_0
או בצורה אחרת:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

דוגמה - $f_n(x) = x^n$ ב-$[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

- לא רציפה

אז אין התכנסות במ"ש ב-$[0,1]$

טענה - נניח $f_n \xrightarrow{u} f$ ונק' x_0 כך ש- $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = L_n \in \mathbb{R}$ לכל n.
אז: $\lim_{n\to\infty} L_n \in \mathbb{R}$ קיים
ו-

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} L_n$$

(ההוכחה עובדת גם ל- $x_0 = \pm\infty$)

הוכחה:
נוכיח עבור $x_0 = +\infty$:
נראה $\{L_n\}$ סדרת קושי ולכן מתכנסת.
יהי $\varepsilon>0$. נמצא N כך שלכל $n,m \geq N$ $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$
לכל x.

$$|L_n - L_m| = \lim_{x\to x_0}|f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon \implies L_n \to L$$

נראה $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ $*$

$$|f(x)-L| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-L_n| + |L_n - L|$$

$f_n \xrightarrow{u} f$ לכן קיים N כך שלכל $n>N$ $|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$
לכל $x>M$

$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = L_n$ $\Leftarrow$ קיים $0<M$ כך שלכל $x>M$ $|f_n(x)-L_n| < \frac{\varepsilon}{3}$
$L_n \to L$ לכן קיים N' כך שלכל $n>N'$ $|L_n - L| < \frac{\varepsilon}{3}$

$*$ בהנתן $\varepsilon>0$ נקבע $n > \max\{N, N'\}$
מתקיים לכל $x>M$,

$$|f(x)-L| \leq 3\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

אז $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$

דוגמה - $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$

$$\forall x.\ f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty} f_n(x)\right) = 1$$

אז אין התכנסות במ"ש.

מנוהפט דיני

קו- $f_n : [a,b] \to$ רציפות , ו- f ו- $f_n \to f$ נקודתית

נניח:

1) ~~מונ~~ מונוטוניות לכל x

2) f רציפה

אזי $f_n \xrightarrow{u} f$

תרגיל - תהי g רציפה ב- $[0,1]$, $g(1) = 0$

הוכיחו $f_n(x) = x^n g(x)$ מתכנסת במ"ש ב- $[0,1]$

הוכחה - g רציפה בקטע סגור $\leftarrow$ $[|g(x)| < M]$.סכ $\exists M$

$|f_n(x)| \leq |x^n| \cdot |g(x)| \leq M \cdot |x^n|$

אז לכל $x \in [0,1]$ $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\forall n .\ f_n(1) = 0$

f_n רציפות וכן $f = 0$ ב- $[0,1]$ ~~רציפה~~

עבור x שבו $g(x) \neq 0$:

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \left|\frac{x^{n+1} g(x)}{x^n g(x)}\right| = |x| \leq 1$$

קיים ו- $f_n(x)$ שומרת סימן:

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \leq 1$$

מסקנה - לכל x בנפרד $f_n(x)$ סדרה מונוטונית.

וממנוהפט דיני $f_n \xrightarrow{u} f$