אינטגרל לא מסוים לפונ' רציונלית

פונ' רציונלית - $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, P,Q פולינומים

אם $\deg Q > \deg P$ אז $R(x)$ פונ' רציונלית פשוטה.

פונ' רציונליות יסודיות

1) $\frac{A}{x-a}$, $a, A\in\mathbb{R}$

2) $\frac{A}{(x-a)^n}$, $a, A\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$

3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, הפולינום במכנה אי פריק $(p^2-4q<0)$
$A,B,p,q\in\mathbb{R}$

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, -||- , $n\in\mathbb{N}$

פיתרון אינטגרל לא מסוים לפונ' רציונליות

1) $\int\frac{A}{x-a}dx = A\log|x-a|+c$

2) $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx = A\frac{(x-a)^{-(n-1)}}{-(n-1)}+c$

3) $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int\frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+\underbrace{q-\frac{p^2}{4}}_{a}}dx \underset{t=x+\frac{p}{2}}{=} \int\frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+a^2}dt =$

$= A\int\frac{t}{t^2+a^2}dt + (B-A\frac{p}{2})\int\frac{dt}{t^2+a^2} =$ $\quad \frac{1}{t^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{(\frac{t}{a})^2+1}$

$= \frac{A}{2}\log|t^2+a^2| + \frac{B-A\cdot\frac{p}{2}}{a}\arctan(\frac{t}{a})+c =$

$= \frac{A}{2}\log(x^2+px+q) + \frac{B-\frac{pA}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}})+c$

4) $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = A\int\frac{t}{(t^2+a^2)^n}dt + (B-\frac{PA}{2})\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n} =$ כמו 3-

$\int\frac{t}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{1}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-(n-1)}}{-(n-1)}+c$

$I_n = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \int t'\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^n}dt =$

$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} - \int t\cdot\frac{-n\cdot 2t}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt =$ אינטגרציה בחלקים -

$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} - \int\frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt =$

$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} - 2n\left[\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n} - a^2\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}\right] =$

$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2I_{n+1}$

נעביר אגפים ונקבל נוסחא רקורסיבית:

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{t}{2na^2(t^2+a^2)^n}$$

לסיכום קיבלנו:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{A}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right) I_n + c$$

חילוק ארוך של פולינומים

משפט - כל פונ' רציונלית אפשר לכתוב כסכום של פולינום ופונ' רציונלית פשוטה.

משפט - כל פונ' רציונלית פשוטה אפשר לכתוב כצירוף לינארי של יסודיות.

דוגמאות:

1)

$$\begin{array}{l|l} \quad x & \\ \hline x^3+0x^2-2x+1 & x^2+3 \\ -\;x^3 \qquad\quad +3x & \\ \hline \qquad\qquad -5x-1 & \end{array} \longrightarrow \frac{x^3-2x-1}{x^2+3} = x - \frac{5x+1}{x^2+3}$$

2)

$$\begin{array}{l|l} x^2-x+1 & \\ \hline x^3+0x^2+0x+1 & x+1 \\ -\;x^3+x^2 & \\ \hline \quad -x^2 \qquad +1 & \\ -\;\;-x^2-x & \\ \hline \qquad\quad x+1 & \\ \quad -\;x+1 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array} \longrightarrow \frac{x^3+1}{x+1} = x^2-x+1$$

3)

$$\begin{array}{l|l} x^2-2x-3 & \\ \hline x^4-2x^3+0x^2+0x-1 & x^2+3 \\ -\;x^4+ \qquad +3x^2 & \\ \hline \quad -2x^3-3x^2 \qquad -1 & \\ -\;\;-2x^3 \qquad -6x & \\ \hline \qquad -3x^2+6x-1 & \\ \quad -\;\;-3x^2 \qquad -9 & \\ \hline \qquad\qquad 6x+8 & \end{array} \longrightarrow \frac{x^4-2x^3-1}{x^2+3} = x^2-2x-3+\frac{6x+8}{x^2+3}$$

פירוק לשברים יסודיים

בהנתן $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ כך ש- $\deg P < \deg Q$ נרצה לפרק את Q לגורמים אי פריקים מהצורה $(x-a)^n$ $(n\ge 1)$, $(x^2+px+q)^n$, $p^2-4q<0$

נסמן $Q(x) = Q_1(x)\cdot Q_2(x)\cdots Q_n(x)$

אז $\frac{P}{Q} = \sum$ (שברים יסודיים)

אם Q_j מהצורה $(x-a)^{n_j}$ נקבל בסכום $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_{n_j}}{(x-a)^{n_j}}$

אם Q_j מהצורה $(x^2+px+q)^{n_j}$ נקבל בסכום $\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\dots+\frac{A_{n_j}x+B_{n_j}}{(x^2+px+q)^{n_j}}$

נמצא את המקדמים של A_k, B_k

דוגמאות

1)

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x(A+B)+A-B}{(x-1)(x+1)}=$$

$A+B=0,\ A-B=1 \rightarrow A=-B=\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

2)

$$\frac{x+3}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{(x+1)^3}=$$

$$=A(x-1)(x+1)^3+B(x+1)^3+C[(x-1)(x+1)^2]+D(x-1)^2(x+1)+E(x-1)^2$$

נציב כמה נקודות נוחות: (צריך להציב רק השונים)

$x=1 \rightarrow 4=8B \rightarrow B=\frac{1}{2}$

$x=-1 \rightarrow 2=4E \rightarrow E=\frac{1}{2}$

$-A=C=\frac{5}{8},\ D=\frac{4}{3}$

נמשיך להציב עוד 3 נקודות, ונקבל לבסוף

3)

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(x+1)(Bx+C)}{(x+1)(x^2+1)}$$

וממשיכים כמו קודם

4)

$$f(x)=\frac{x^3}{(x^2-1)(x+1)}=\frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}=$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+D$$

דרך נוספת לחשבנות - A, B, C, D

$D=\lim_{x\to\infty} f(x)=1$

$A=\lim_{x\to 1} f(x)\cdot(x-1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\frac{1}{4}$

$C=\lim_{x\to -1} f(x)\cdot(x+1)^2=\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{x-1}=\frac{1}{2}$

וכנ"ל על B.

שיטת הצבה

$R(f_1(x)\dots f_k(x))=$ פונ' רציונליות של $f_1\dots f_k$

1) $\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, ההצבה שנשתמש בה -

$t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

$x=\frac{b-t^m d}{t^m c-a}$

דוגמה -

$$\int\frac{x\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}{2x+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}= \quad t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}},\ x=\frac{1+t^3}{t^3-1},\quad dx=\frac{3t^2[(t^3-1)-(t^3+1)]}{(t^3-1)^2}dt=\frac{3t^2\cdot(-2)}{(t^3-1)^2}dt$$

$$=\int\frac{\frac{1+t^3}{t^3-1}\cdot t}{2\cdot\frac{1+t^3}{t^3-1}+t}\cdot\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}dt=-6\int\frac{(1+t)^3t^3}{2(1+t^3)+t(t^3-1)}dt$$

עוד צהאזמנו יודעים לפתור עם השיטות מתחילת התרגול

דוגמה -

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{1+t}$$

$t=\sqrt{x}$, $x=t^2$, $dx=2t\,dt$

(2

$$\int R\left(x, \sqrt[m_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[m_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

$n = lcm(m_1 \ldots m_k)$: המספר השלם הקטן ביותר שמתחלק בכל m_j $(lcm(2,4,6)=12)$

least common multiplier

ההצבה שנקח - $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

דוגמה -

$$\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5\,dt}{t^6(1+2t^3+t^2)}$$

$t=\sqrt[6]{x}$, $x=t^2$, $dx=6t^5\,dt$