מכפלות פנימיות

הגדרות - V מ"ו לינארי מעל $\mathbb{C}$.

מכפלה פנימית: $f=\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{C}$ המקיימת:

1) $\langle w,w\rangle \ge 0$, $\langle w,w\rangle=0 \leftrightarrow w=0$

2) $\langle w+v,u\rangle = \langle w,u\rangle+\langle v,u\rangle$

3) $\langle \alpha w,u\rangle=\alpha\langle w,u\rangle$

4) $\langle w,u\rangle=\overline{\langle u,w\rangle}$

דוגמאות - 1) $\mathbb{C}^n$: $x=(x_1\dots x_n)$, $y=(y_1\dots y_n)$

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^n x_k\overline{y_k}$$

2) $R(\pi)$ מרחב הפונ' אינט' רימן ב- $[-\pi,\pi]$

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

* למעשה זו חצי מכפלה פנימית כי החלק השני של איקיומה 1 לא מתקיים

טענה - אם $x_1,\dots,x_n\in V$ במרחב מכפלה פנימית (מ.פ.) אורתוגונלים אח לשני, כלומר

$$\langle x_j,x_k\rangle = \begin{cases}0 & k\ne j\\ c_j & k=j\end{cases} \quad , \quad c_j>0$$

אז מתקיים ש- $x_1\dots x_n$ בת"ל.

הוכחה - נניח בשלילה שקיימים $a_1\dots a_n$ לא כולם 0, כך ש- $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$ אז:

$$0=\langle x_j, a_1x_1+\dots+a_nx_n\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{a_k}\langle x_j,x_k\rangle = \overline{a_j}\cdot c_j$$

בגלל ש- $c_j\neq0$, $\overline{a_j}=0$. סתירה!

הגדרה - נורמה של מ"ו לינארי V היא פונקציה $\|\cdot\|: V\to\{x\ge0\}$ המקיימת:

1) $\|w\|\ge0$, $\|w\|=0 \leftrightarrow w=0$

2) $\|\alpha w\|=|\alpha|\cdot\|w\|$

3) $\|w+u\|\le\|w\|+\|u\|$

* נשים לב שכל מרחב מ.פ. הוא מרחב נורמי עם הנורמה המושרית- $\|w\|=\sqrt{\langle w,w\rangle}$

* לא כל נורמה היא נורמה מושרית.

דוגמאות - 1) $\mathbb{C}^n$: $x=(x_1,\dots x_n)$, $y=(y_1\dots y_n)$

$$\|x\|_2=\left(\sum_j |x_j|^2\right)^{1/2}$$

$$\|x\|_p=\left(\sum_j |x_j|^p\right)^{1/p} \quad , \quad 1\le p$$

$$p=\infty \Rightarrow \|x\|=\max_{j=1\dots n}\{|x_j|\}$$

2) $R(\pi)$: $\|f\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^p\right)^{1/p}$

טענה - אי שוויון בסל (Bessel)

V מ"ו אינסוף מימדי (עם מ.פ.) , $e_1,e_2\dots e_n\in V$ אורתונורמלית

כלומר:

$$\langle e_j,e_k\rangle=\begin{cases}0 & k\neq j\\ 1 & k=j\end{cases}$$

אז:

$$\forall v\in V \ . \ \sum_{j=1}^{\infty}|\langle v,e_j\rangle|^2\le\|v\|^2$$

הוכחה - נקבע $n\in\mathbb{N}$.

$$0\le\|v-\sum_{j=1}^{n}\langle v,e_j\rangle e_j\|^2=$$

$$=\langle v-\sum_{j=1}^{n}\langle v,e_j\rangle e_j \ , \ v-\sum_{j=1}^{n}\langle v,e_j\rangle e_j\rangle=$$

$$=\|v\|^2-\langle\sum_{j=1}^{n}\langle v,e_j\rangle e_j \ , \ v\rangle-\langle v,\sum_{k=1}^{n}\langle v,e_k\rangle e_k\rangle+\langle\sum_{j=1}^{n}\langle v,e_j\rangle e_j,\sum_{j=1}^{n}\langle v,e_k\rangle e_k\rangle$$

$$=\|v\|^2-\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\langle v,e_j\rangle\langle e_j,v\rangle}_{|\langle v,e_j\rangle|^2}-\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\overline{\langle v,e_k\rangle}\langle v,e_k\rangle}_{|\langle v,e_k\rangle|^2}+\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle v,e_j\rangle\overline{\langle v,e_k\rangle}\langle e_j,e_k\rangle}_{\sum_{j=1}^{n}|\langle v,e_j\rangle|^2}=$$

$$\|v\|^2-\sum_{j=1}^{n}|\langle v,e_j\rangle|^2$$

• האי שוויון הנ"ל נכון לכל n ולכן נשמר ב-∞.

מסקנה - אי-שוויון קושי-הולדר

$$\forall u,w\in V \ . \ |\langle w,u\rangle|\le\|w\|\cdot\|u\|$$

הגדרה - בהינתן סדרה $\{f_n\}\subset R(\pi)$ ותהי $f\in R(\pi)$

נאמר כי f_n מתכנסת בנורמה ל-f אם:

$$\|f_n-f\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

מסמנים $f_n\xrightarrow{\|\cdot\|}f$

* ביחס לנורמה L^2 והמרחב $R(\pi)$ הגבול בנורמה לא נקבע ביחידות

אלה רק עד כדי פונ' בעלות נורמה 0.

$$\|f_n\|_{L^2}^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_n(x)|^2dx$$

תרגיל - תהי $\{f_n\}\in R(\pi)$, $f,g\in R(\pi)$. כך ש- $f_n\xrightarrow{\|\cdot\|}f$. $f_n\xrightarrow{\|\cdot\|}g$

אזי $\|f-g\|_{L_2}=0$

הוכחה -

$$\|f-g\|\le\|f-f_n\|+\|f_n-g\|\xrightarrow{n\to\infty}0$$

* אם f,g רציפות נקבל $f\equiv g$

Scanned by CamScanner