תרגול חדו"א 2

איתי לונדנר - itaylond@post.tau.ac.il תאו - 219

להציק רק עם שאלות על מתמטיקה, לא שאלות של מנהלה (איחורים בהגשת ש"ב וכו...)

הגשה - כ- 70%, הגשה בימי שלישי לתרגול או לתא, עד יום שלישי ב- 15:00

לא יעלו סיכומים מסודרים, הם יהיו דומים לשל שנים קודמות

אינטגרל לא מסוים ופונקציה קדומה

הגדרה - $f:I\to\mathbb{R}$. F תקרא קדומה של f ב- I אם $\forall x\in I.\ F'(x)=f(x)$

נסמן:

$$\int f(x)dx=\{F:I\to\mathbb{R} \mid F'=f\}$$

טענה - אם F_1,F_2 קדומות של f, הן נבדלות בקבוע: $F_1=F_2+c$

משפט דרבו - תהי $F:I\to\mathbb{R}$ גזירה. אזי ל- F' יש את תכונת ערך הביניים

מסקנה - אם $F:I\to\mathbb{R}$ גזירה, אז ל- F' אין נק' אי רציפות סליקות או סוג I.

מסקנה - לפונ' $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=[x]$ אין קדומה ב- $\mathbb{R}$
(לכל פונ' שלא מקיימת את תכונת ערך הביניים בקטע I).

מסקנה - כשמחפשים קדומה לפונ' f מספיק לבחור נציג מהמחלקה $\int f(x)dx$ ולכתוב $\int f(x)dx=F+c$

אינטגרלים בסיסיים

1) $\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c$

2) $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$ $\qquad \alpha\neq -1$

3) $\int \frac{1}{x}dx=\log|x|+c$

4) $\int e^x dx=e^x+c$

5) $\int \sin x\,dx=-\cos x+c$

6) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c$

7) $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$

דוגמאות

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in(0,1] \\ 0 & x\in(1,2) \end{cases}$$

$\Leftarrow$ אין קדומה, כי בתחום ההגדרה הפונ' לא מקיימת את תכונת ערך הביניים.

משפט - אם f רציפה ב- I, קיימת לה קדומה ב- I

טענה - אינטגרל לא מסוים הוא פעולה לינארית

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}dx - 2\int \frac{1}{x}dx + \int dx =$$ תרגיל -

$$= -\frac{1}{x} - 2\log|x| + x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x+1-(x-1)}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int\sqrt{x+1}\,dx - \int\sqrt{x-1}\,dx\right) =$$ תרגיל -

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\right) + c$$

$$\int \frac{x^3-1}{x-1}\,dx = \int \frac{x^2+x+1}{x-1}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$$ תרגיל -

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$$ תרגיל -

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx = \ln(1+x^2) + c$$ תרגיל -

טענה כללית - לכל $f \neq 0$ בצורה מתקיים $\frac{f'}{f} = (\ln|f|)'$

כלומר - $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f| + c$

תרגול 2

אינטגרל לא מסוים

- $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$
- $$\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$$

אינטגרציה בחלקים

אם ל- $f'g$ יש פונ' קדומה, אז: $\int f\cdot g' = fg - \int f'g$

דוגמאות:

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln x - x + c$$

$$\int \arctan x\,dx = x\cdot\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx = x\cdot\arctan x - \int \frac{1}{2}\,\frac{2x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

$$I = \int \underbrace{e^x}_{f}\,\underbrace{\cos x}_{g'}\,dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x = e^x\sin x - \left(-e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx\right)$$

$$I = e^x\sin x + e^x\cos x - I$$

$$I = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$$

Scanned by CamScanner

החלפת משתנים

$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$. $a,b\in\mathbb{R}$, F קדומה של f

טענה: תהי f בעלת פונ' קדומה $F(x)=\int f(x)dx$. עבור פונ' g גזירה:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))$$

סימון:

$$t = g(x)\ ,\quad dt = g'(x)\,dx$$

דוגמאות:

$$\int (x-1)^{100} x\,dx = \quad (x-1=t\ ,\ dx=dt \longrightarrow x=t+1)$$

$$= \int t^{100}(t+1)\,dt = \int t^{101}+t^{100}\,dt = \frac{t^{102}}{102}+\frac{t^{101}}{101}+c =$$

$$= \frac{(x-1)^{102}}{102}+\frac{(x-1)^{101}}{101}+c$$

$$\int (2x+1)^{10}dx = \quad (t=2x+1\ ,\ dt=2dx \rightarrow dx=\frac{dt}{2})$$

$$= \int \frac{1}{2}t^{10}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{11}}{11}+c = \frac{(2x+1)^{11}}{22}+c$$

החלפת משתנים "בכיוון ההפוך"

טענה: עבור $\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))$

נסמן $t=g(x)$.

אם g הפיכה, $x=g^{-1}(t)$, ונקבל $\int f(t)\,dt = F(t)$

דוגמאות:

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \quad (x=t^2\ ,\ dx=2t\,dt)$$

$$= \int \frac{2t\,dt}{(1+t^2)t} = \int \frac{2}{1+t^2}dt = 2\arctan + c$$

תרגילים

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \quad (t=\ln x\ ,\ dt=\frac{dx}{x} \rightarrow dx = x\,dt)$$

$$= \int \cancel{\frac{x\,dt}{x\ln x}}\ \frac{x\,dt}{x\,t} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+c = \ln|\ln x|+c$$

$$\int x^2(x^3+2)^{1/5}dx = \quad (t=x^3+2 \rightarrow x=(t-2)^{1/3}\ ,\ dt=3x^2dx\ ,\ dx=\frac{1}{3}(t-2)^{-2/3}dt)$$

$$= \int (t-2)^{2/3}\cdot t^{1/5}\cdot\frac{1}{3}(t-2)^{-2/3}dt = \frac{1}{3}\int t^{1/5}dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot -\frac{5}{6}\,t^{6/5}+c = -\frac{5}{18}(x^2+2)^{6/5}+c$$