13.3.17

הרצאה 1

shuri@post.tau.ac.il

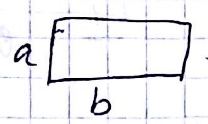
קבלה: יום שני $10^{30}-11^{30}$. שרייבר 306. לשאלה מייל.

שלושה חלקים לקורס:

1. אינטגרלים. (קצת פחות מ-$1/3$ קורס)
2. סדרות של פונקציות - חזק׳, טורי פורייה. (החלק הגדול)
3. חדו״א בכמה משתנים.

א. אינטגרלים – הקדמה

אינטגרציה - שטח של משהו.



$- S=ab$

$\overline{A_n}$ $\underline{A_n}$ (מלמטה ומלמעלה)

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$x_i = \frac{i}{n}$

$$\overline{A_n}=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^3}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\underline{A_n}=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f(x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

כעת, $\underline{A_n}\le S\le\overline{A_n}$ ויש נוסחה מפורשת ל-$\underline{A_n},\overline{A_n}$.

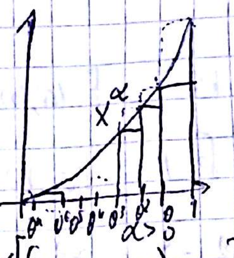
שמקיים $\frac{1}{n}=\overline{A_n}-\underline{A_n}$ $\Leftarrow$ אם קיימים הגבול $\lim_{n\to\infty}\overline{A_n},\lim\underline{A_n}$ אז הם שווים.

משתמשים $\sum_{i=1}^{m} i^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$. לכן -

$$\overline{A_n}=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad \underline{A_n}=\frac{1}{n^3}(n-1)n(2n-1)\cdot\frac{1}{6}$$

לכן $\lim_{n\to\infty}\underline{A_n}=\lim_{n\to\infty}\overline{A_n}=1/3$.

יהי $0<\theta<1$. ניקח את הסדרה $\theta^0,\theta^1,\theta^2,\dots,\theta^n,0$. ($m\in\mathbb{N}$)



כך ש $\underline{A_{n,\theta}}\le S\le\overline{A_{n,\theta}}$. משתמשים:

$$\overline{A_{n,\theta}}=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\theta_i f(\theta_i)=\sum_{i=0}^{n-1}(\theta^i-\theta^{i+1})\theta^{i\alpha}=\sum_{i=0}^{n-1}\theta^i(1-\theta)\theta^{i\alpha}\left[+\theta^n\cdot\theta^{n\alpha}\to 0\right]$$

$$\underline{A_{n,\theta}}=\sum_{i=0}^{n-1}\theta^i(1-\theta)\theta^{i\alpha+\alpha}$$

$$\overline{A_\theta}=\sum_{i=0}^{\infty}\theta^{i(1+\alpha)}(1-\theta),\quad \underline{A_\theta}=\sum_{i=0}^{\infty}\theta^{i(1+\alpha)}(1-\theta)\,\theta^\alpha$$

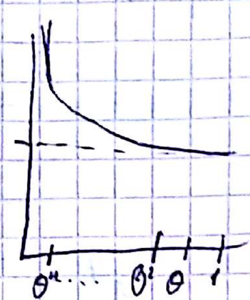
$$\frac{(1-\theta)\theta^{\alpha}}{1-\theta^{1+\alpha}} = \theta^{\alpha}(1-\theta)\sum_{i=0}^{\infty}(\theta^{1+\alpha})^i = \underline{A}_\theta \le S \le \bar{A}_\theta = (1-\theta)\sum_{i=0}^{\infty}(\theta^{1+\alpha})^i = (1-\theta)\frac{1}{1-\theta^{1+\alpha}}$$

כלומר $\frac{\theta^{\alpha}(1-\theta)}{1-\theta^{1+\alpha}} \le S \le \frac{1-\theta}{1-\theta^{1+\alpha}}$

נשאיף $\theta \to 1^-$, ובלופיטל על $f(\theta)$ נקבל:

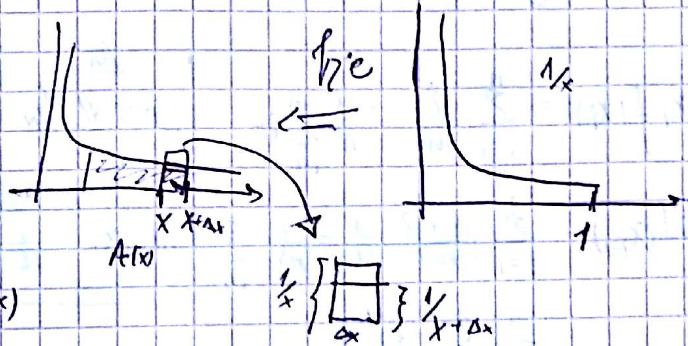
$$\lim_{\theta\to1^-}\bar{A}_\theta = \lim_{\theta\to1^-}\underline{A}_\theta = \frac{1}{1+\alpha}$$

כאשר- $\alpha<0$
$\alpha=\frac{1}{2}$



הנוסחא יתנו ב— אותה הוכחה.

$A(x+\Delta x) = A(x) +$ מלבן



$$\frac{\Delta x}{x+\Delta x} + A(x) \le A(x+\Delta x) \le \frac{\Delta x}{x} + A(x)$$

לכן - $\frac{1}{x} \ge \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} \ge \frac{1}{x+\Delta x}$. אזי $A'(x)=\frac{1}{x}$, אם

A קדומה. לכן, $A(x)=\ln x + C$. ונציב $A(1)=0$ ונקבל

$C=0$, כלומר $A(x)=\ln x$ בדיוק.

$\Longleftarrow$ כלומר לצורך, בהינתן f, נמצא F כך ש- $F'=f$,

כי שקול ל— פונקציה קדומה.

2. פונקציה קדומה:

הגדרה: תהי $f:(a,b)\to R$. נאמר ש- $F:(a,b)\to R$ היא קדומה

של f, אם F גזירה ב- (a,b) ולכל $x\in(a,b)$,

$F'(x)=f(x)$. אם $f:[a,b]\to R$ נדרוש את זה ב- (a,b)

ובקצוות נדרוש $F'_+(a)=f(a),\ F'_-(b)=f(b)$.

לאוסף כל הפונקצ' הקדומות של f נשנה קוראים <u>האינטגרל המסו"ם</u> של f, ומסמנים- $\int f$.

למשל, $\int \frac{1}{x} = \ln x + c$.

<u>הערה 1</u>: (מחדו"א 1) כל שתי קדומות של אותה f, נבדלות בקבוע.

<u>הערה 2</u>: לא לכל פונקציה יש קדומה – למשל [—o —] כי לא מקיימת את תכונת ערך הביניים ולכן לא נגזרת של פונקציה.

3. אינטגרל רימן (בקטע סופי וסגור)

<u>הגדרה</u>: <u>חלוקה</u> של הקטע $[a,b]$ זוהי קב' <u>סופית</u> של נק' $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\} \subseteq [a,b]$ כך ש-
1) $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
לקטע $[x_{i-1}, x_i]$ קוראים תת קטע ה-i של החלוקה.
מסמנים $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(=\Delta_i)$. <u>העדינות</u> של החלוקה, מסומנת $\lambda(\Pi) := \max_{i=1,\dots,n}(\Delta_i)$.

<u>הגדרה</u>: נאמר שחלוקה Π_2 היא <u>עידון</u> של החלוקה Π_1 אם $\Pi_2 \supseteq \Pi_1$ (בפרט נובע $\lambda(\Pi_2) \le \lambda(\Pi_1)$)

<u>הדגשה לגבי חלוקה – מס' הנק' סופי!</u>

<u>הגדרה</u>: בהינתן קטע $[a,b]$ וחלוקה Π של הקטע. נאמר שנק' $\Pi = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. אוסף הנק' $a \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_n \le b$ נקרא <u>מתאימות</u> ל-Π אם לכל i, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

<u>למשל</u>: $t_i = x_i$, $t_i = x_{i-1}$, $t_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ מתאימות, וגם עוד אפש' רבות.

הגדרה: בהינתן $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, חלוקה $\Pi = \{a=x_0<\dots<x_n=b\}$ של $[a,b]$ ונק' מתאימות $a\le t_1\le\dots\le t_n\le b$, סכום רימן של f ביחס לחלוקה ולנק' מוגדר להיות:

$$S(f,\Pi,\{t_i\}_{i=1}^{n})=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f(t_i)$$

הגדרה: [אינטגרביליות רימן]

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. נאמר ש-f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$ אם: קיים מספר I כך שלכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה Π כך ש-$\lambda(\Pi)<\delta$ ולכל בחירה של נק' מתאימות לחלוקה Π, $\{t_i\}$, מתקיים $|S(f,\Pi,\{t_i\})-I|<\varepsilon$.

במקרה כזה נסמן $\int_a^b f(x)\,dx = I$. ונאמר ש-I הוא האינטגרל המסוים של f מ-a ל-b.

את אוסף כל הפונקציות האינטגרביליות בקטע $[a,b]$ מסמנים $R([a,b])$. (לפעמים כותבים $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\lambda(\Pi)\to 0} S(f,\Pi,\{t_i\})$)