7/5/13

קומבינטוריקה בסיסית - שיעור VIII

משפט Erdos-Ko-Rado

אם $n\ge 2k$ ו- $S_1,\dots,S_m$ תת-קבוצות של $[n]$ בגודל k
והן $(S_i\cap S_j\neq\emptyset)$ אז $\binom{n-1}{k-1}\geq k$

משפט Kruskal-Katona

נניח $S_1,\dots,S_m$ הן תת-קבוצות של $[n]$ בגודל t.
נניח $m=\binom{x}{t}$ עבור x ממשי כלשהו, עבור קבוצה S בגודל
t ו- $t>k$ נסמן ב- $\sigma_k(S)$ את כל תת-הקבוצות של S
בגודל k. נסמן ב- $\sigma_k(S_1,\dots,S_m)=\bigcup\sigma_k(S_i)$ אז: $\sigma_k(S_1,\dots,S_m)\geq\binom{x}{k}$

EKR $\Leftarrow$ KK

נניח $S_1,\dots,S_m$ נחתכות ו- $\binom{n-1}{k-1}<\binom{x-1}{k-1}=m$.
נגדיר $T_i=[n]\setminus S_i$ אז יש לנו $\binom{n-1}{n-k}=\binom{n-1}{k-1}\leq m$ קבוצות
כנ"ל ממשפט KK נקבל ש: $\sigma_k(T_1,\dots,T_m)\geq\binom{n-1}{k}$
אז יש לנו יותר מ- $\binom{n-1}{k-1}$ קבוצות $S_1,\dots,S_m$ ולפחות $\binom{n-1}{k}$
קבוצות ב- $\sigma_k(T_1,\dots,T_m)$. הי' ש- $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$
נובע שיש קבוצה S_i כך ש $S_i\in\sigma_k(T_1,\dots,T_m)$ כלומר
$S_i\subseteq T_j$ כלומר $S_i\subseteq[n]\setminus S_j$ אבל אז $S_i\cap S_j=\emptyset$

נוכיח רק מקרה פרטי:
אם ההיפרגרף 3 יוניפורמי, מכיל $m=\binom{x}{3}$ קשתות אז יש
לפחות $\binom{x}{2}$ זוגות שונים (u,v) כך ש-(u,v) שייך
לקשת כלשהי.

[illegible] שנוכיח את הטענה הבאה:
אם G היא גרף המכיל $\binom{x}{2}$ קשתות אז הוא
מכיל לכל היותר $\binom{x}{3}$ משולשים.

לכל צומת v נסמן ב- $D(v)$ את מס' המשולשים בגרף
שייך v. נסמן ב- $d(v)$ את דרגתו של v

טענה:
- $\binom{d(v)}{2}\geq D(v)$
- $m-d(v)\geq D(v)$

מסקנה: $\left(\frac{x-2}{x}\right) d(v) \geq D(v)$

$$3\#K_3(G) = \sum_v D(v) = \sum_v \left(\frac{x-2}{2}\right) d(v) = \left(\frac{x-2}{2}\right)\sum_v d(v) = \left(\frac{x-2}{2}\right) 2m = \left(\frac{x-2}{2}\right) x(x-1)$$

$$\Rightarrow \#K_3(G) \leq \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = \binom{x}{3}$$

<u>הוכחה:</u>

נוכיח מטענה קודם:

$$\binom{d}{2} \leq \frac{x-2}{2}\cdot d \Rightarrow \frac{d(d-1)}{2} \leq \frac{x-2}{2}\cdot d \Rightarrow d-1 \leq x-2 \Rightarrow d \leq x-1$$

$$m-d \leq \frac{x-2}{2}d \Rightarrow \frac{x(x-1)}{2} - d \leq \frac{x-2}{2}\cdot d \Rightarrow x(x-1)-\cancel{2d} \leq xd - \cancel{2d}$$

$$\Rightarrow \cancel{x}-1 \leq d$$

<u>עקרון הכלה-הפרדה:</u>

בהינתן קבוצות $S_1,\dots,S_n$ אנו רוצים לחשב את $|\bigcup_i S_i|$.

$n=2$: $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$

$n=3$: $|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

ובאופן כללי:

$$\left|\bigcup_i S_i\right| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} S_i\right|$$

<u>הוכחה 1</u>

אינדוקציה על n. ל-$n=2$ ברור.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} S_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right)\cup S_{n+1}\right| \underset{n=2}{=} \left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| + |S_{n+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right)\cap S_{n+1}\right| \underset{\text{אינדוקציה ל-}n}{=}$$

$$= \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|-1}\left|\bigcap_{i\in I} S_i\right| + |S_{n+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{n}(S_i\cap S_{n+1})\right| \underset{\text{אינדוקציה ל-}n}{=}$$

$$= \quad '' \quad + \quad '' \quad - \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|-1}\left|\bigcap_{i\in I\cup\{n+1\}} S_i\right| =$$

$$= \underbrace{\quad '' \quad}_{\text{כל תת קבוצות } I \text{ בלי } n+1} + \underbrace{\quad '' \quad}_{\text{תת קבוצה } J=\{n+1\}} + \underbrace{\sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|}\left|\bigcap_{i\in I\cup\{n+1\}} S_i\right|}_{\text{כל תת הקבוצות עם } n+1 \text{ בגודל } \geq 2.} = \underbrace{\sum_{\emptyset\neq J\subseteq[n+1]} (-1)^{|J|-1}\left|\bigcap_{j\in J} S_j\right|}_{\text{כל תת קבוצות של } [n+1].}$$

$|J|=|I|+1$

הוכחה 2:

נראה שכל איבר x "בעולם" תורם תרומה נטו 1 לאיחוד. ניקח $x\in\bigcup_{i=1}^{n}S_i$ ונראה שיש לו תרומה נטו 1.

לצד שמאל היא תורם 1.

נניח ש-x שייך ל-k מהקבוצות, נקרא להן $S_1,\dots,S_k$ אז היא תורם לצד ימין רק כאשר $I\subseteq[k]$ לכן תרומתו היא:

$$1-\Big(\underbrace{k-\tbinom{k}{2}}_{\#=1\ \ \#=2}-\tbinom{k}{3}-\tbinom{k}{4}+\dots\pm1\Big)=(1-1)^k=0$$

$$=1$$

[אם אין הי"ר ברור - התשובה היא 1. תרומתו של x היא:

$$\Big[\Big(k-(k\ 2)+\dots\pm1\Big)=1-(1-1)^k\qquad=1-0=1$$

כמה פרמוטציות יש ללא נקודת שבת?

נגדיר A_i להיות אוסף הפרמוטציות בהן $i\to i$ והתשובה היא לכן

$$n!-\Big|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big|=n!-\sum_i|A_i|+\sum_{i,j}|A_i\cap A_j|\dots=$$

$$=n!-n(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\binom{n}{3}(n-3)!\dots=n!-\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}-\frac{n!}{3!}\dots=$$

$$=n!\Big(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{k!}\Big)\sim\frac{n!}{e}$$

לכמה מספרים מ-$\{1,\dots,n\}$ אין מחלק משותף עם n?

$$\varphi(n)=\big|\{m\in[n]\mid gcd(n,m)=1\}\big|=n\cdot\prod_{p|n}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)$$

$$\varphi(p)=p-1\ ,\ \varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}=p^k\Big(1-\frac{1}{p}\Big)$$

נניח $n=\prod p_i^{\alpha_i}$. נגדיר S_p להיות כל המספרים מ-$[n]$ שמתחלקים ב-p.

$$\varphi(n)=n-\Big|\bigcup_p S_p\Big|=n-\sum_p\frac{n}{p}+\sum_{p_1p_2}\frac{n}{p_1p_2}-\sum_{p_1p_2p_3}\frac{n}{p_1p_2p_3}\dots$$

$$=n\prod_{p|n}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)$$

<u>בעיית ה- Menage</u>

יש 2n כיסאות מסומנים סביב שולחן מעגלי ו-n זוגות. מושיבים את הגברים במקומות הזוגיים.

בכמה אופנים ניתן להושיב את הנשים כך שאף אשה לא תשב ליד בעלה?

נגדיר - A_i להיות אוסף התושבות בהן אישה i יושבת לימין בעלה

B_i " " " " " " לשמאלו ".

[הערה: צריך להגיד בן-זוג ולא בעל...]

נסמן $f(n,r)$ את מספר האפשרויות לבחור r "חיתוכים" אפשריים.

לדוגמא: $f(n,1)=2n$ כי כל אחד מ-$2n$ החיתוכים $A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_n$ הוא אפשרי.

נשים לב שבחיתוך של r קבוצות מ-$A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_n$ יש 0 איברים (אם זו בחירה לא אפשרית כמו $A_3\cap B_3$) או $(n-r)!$.

[הערה: $A_i\cap B_i$ אפשרי $\Leftarrow$ $n=1$ ובמקרה הזה בכל מקרה $M(n)=1$]

לכן קיבלנו:

$$M(n)=n!-\left|\bigcup_i (A_i\cup B_i)\right| = n! - f(n,1)(n-1)! + f(n,2)(n-2)! \dots$$

נתבונן במקרה הכללי:

בהינתן הושבה נגדיר מחרוזת מעגלית של 0/1 באורך $2n$ באופן הבא: שים 1 במקום ה-i $\Leftarrow$ אישה i יושבת לימין בעלה

" " " ה-$2i$ $\Leftarrow$ " " " לשמאלו "

מס' האפשרויות לבחור r איחודים אפשריים $\equiv$ מס' המחרוזות המעגליות של $\{0,1\}$ באורך $2n$ עם בדיוק r 1-ים ולא שני 1-ים צמודים $\equiv f(n,r)$

כל סוג כנ"ל היא מתכונה:

עבור x כלשהו נחלק את $[n]$ ל-x קבוצות זרות (חלקית)

לכן לשים את הקבוצה הראשונה, השנייה...

לכל x יש $S(n,x)$ אפשרויות לחלק את $[n]$ ל-x קבוצות

ו-$(x)_x$ אפשרויות לבחור את צמודתן.

מקרה 1: האבר הראשון הוא 1.

אז בחירת $r-1$ האיברים שקולה לבחירת r המרחקים ביניהם.

כלומר $x_1,\dots,x_r$ כך ש- $\sum_{i=1}^{r} x_i = 2n-r$, $x_i>0$

אנו יודעים $= \binom{2n-r-1}{r-1}$

מקרה 2: מקום ראשון ישנו. צריך לבחור $r+1$ מרחקים ביניהם.

$\sum_i x_i = 2n-r+1$, $x_i>0$

$$\binom{2n-r}{r}$$

$$f(n,r) = \binom{2n-r}{r} + \binom{2n-r-1}{r-1}$$

$$M(n) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r (n-r)! \cdot \left(\binom{2n-r}{r} + \binom{2n-r-1}{r-1} \right)$$

מספרי סטירלינג מסוג שני:

נסמן ב- $S(n,k)$ את מספר האופנים בהם ניתן לחלק n איברים ל- k קבוצות. $S(n,n)=1$ לכל $n\geq 0$. אם $n<k$ אז $S(n,k)=0$.

$S(n,1)=1$ לכל $n\geq 1$.

נגדיר B_n - B (מספרי Bell) הוא מספר האופנים בהן ניתן לחלק n איברים למספר כלשהו של קבוצות. לכן:

$$B(n) = S(n,0)+S(n,1)+\dots+S(n,n)$$

טענה: $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\cdot S(n-1,k)$

טענה: $k!\cdot S(n,k)$ = מס' הפונקציות מ- $[n]$ על $[k]$.

טענה: $x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k$ $\quad [(x)_k = x(x-1)\cdot\dots\cdot(x-k+1)]$

הוכחה:

נוכיח שוויון לכל $x>0$, והוא שיש לנו פולינום מדרגה n בכל צד ולכן זה יהיה נכון. צד שמאל סופר את מס' הפונקציות מ- $[n]$ ל- $[x]$.

מספרי סטירלינג מסוג ראשון בלי סימנים:

$C(n,k)$ = מספר הפרמוטציות על $[n]$ המכילות k מעגלים.

אז $C(n,n)=1$ לכל $n\geq 0$. $C(n,k)=0$ אם $n<k$.

$C(n,0)=0$ לכל $n>0$.

טענה:

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)(n-1)$$

$$\sum_{k=0} c(n,k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$

טענה:

נניח $x(x+1)\cdots(x+n-1)=\sum_{k=0}^{n} b(n,k)x^k$:

$n\geq 0 \Rightarrow b(n,n)=1$

$k>n \Rightarrow b(n,k)=0$

$n>0 \Rightarrow b(n,0)=0$

כמו כן את נרשום

$\underbrace{x(x+1)\cdots(x+n-2)}(x+n-1)$

אז נקבל:

$$b(n,k)=b(n-1,k-1)+(n-1)b(n-1,k)$$

מספרי סטרלינג מסוג ראשון גרסה מסומנת:

$$S(n,k)=\underbrace{(-1)^{n-k}}c(n,k)$$

הסימן של פרמוטציה עם k מעגלים

טענה:

$$(x)_n=\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}c(n,k)x^k=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c(n,k)\cdot x^k=$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-x)^k c(n,k)=(-1)^n(-x)(-x+1)(-x+2)\cdots=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

בהינתן פרמוטציה π המכילה k מעגלים נגדיר $sign(\pi)=(-1)^{n-k}$

טענה:

לכל $n\geq 2$ יש מספר זהה של פרמוטציות עם סימן ± 1.

הוכחה:

נציב $x=1$ בנוסחה האחרונה היות ש $(1)_n=0$ לכל $n\geq 2$ נקבל:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}c(n,k)=0$$

טענה:

חילוף משנה את סימנה של הפרמוטציה.

הוכחה:

נניח $x\to i$, $y\to j$ ונבדוק מה קורה אחרי ההחלפה:

1) $\begin{pmatrix} x & i \\ \uparrow & \downarrow \\ j & y \end{pmatrix}$ ל $\begin{pmatrix} i \longrightarrow y \\ x \longleftarrow j \end{pmatrix}$

נשים לב שהמצב זה נגרר מטענה קודמת כי הפונקציה $f(\pi)$ שמגדירה $\pi\circ$ חילוף $(1,2)$ היא חח"ע ועל נקודת שבת.