30/4/13

קומבינטוריקה בסיסית - הרצאה VII

משפט Arrow:

תזכורת: קלט - n פרמוטציות על [k]

פלט - פרמוטציה אחת של [k]

מטרה: הפלט "ישקלל" באופן "הוגן" את n הקלטים.

נסיון ראשון: אם $x<y$ ברוב הקלטים אז $x<y$ גם בפלט.

פרדוקס Condorcet:

נניח הקלטים הם

$$\begin{cases} x<y<z \\ z<x<y \\ y<z<x \end{cases} \qquad x<y<z<x$$

אקסיומות:

A1) אם $S_1,\dots,S_n$ הן כאלה ש- $F(S_1,\dots,S_n)$ מדרגת את y מעל x אז זה המקרה גם אם נשנה כל S_i כך ש- y ידורג גבוה יותר.

A2) תהא $T\subseteq[k]$ ונניח שב- $F(S_1,\dots,S_n)$ T מסודרת בסדר פנימי כלשהו אז אם לכל i, הסידור הפנימי של T ב- S_i' זהה לזה של S_i אז הסידור הפנימי של T ב- $F(S_1',\dots,S_n')$ זהה לזה של $F(S_1,\dots,S_n)$.

A3) לכל (x,y) יש $S_1,\dots,S_n$ כך שב- $F(S_1,\dots,S_n)$ $x<y$.

נשים לב שאם $F(S_1,\dots,S_n)$ מחזירה S_i, כלומר דיקטטורה מקיימת את שלושת האקסיומות.

משפט: אם $k\geq 3$ אז כל פונ' f המקיימת את A1,A2,A3 היא דיקטטורה.

טענה: אם $x<y$ בכל הקלטים אז $x<y$ בפלט.

הוכחה:

מ- A3 נובע ש- $S_1,\dots,S_n$ כך ש- $x<y$.

מ- A1 נובע שאם נקדם את y (אם צריך) כך ש- $x<y$.

בכל הקלט זה עדיין $y<x$ ולבסוף ב-A אומרת שניתן עכשיו לסדר את שאר הפרטים איך שנרצה ועדיין $y<x$.

<u>הגדרה:</u>

נגיד ש- $J\subseteq[n]$ היא (y,x) - קובעת אם $y<x$ בפלט ואם $x<y$ לפני כל איבר J.

<u>הגדרה:</u>

נגיד ש- J היא קובעת אם היא (y,x)-קובעת עבור (y,x) כלשהו.

<u>טענה 2:</u>

J היא (y,x)-קובעת $\Longleftrightarrow$ קיים קלט $\pi_{1,\dots,t}$ בו $y<x$ לפני זמן t ו- $x<y$ אחרי זמן t ועדיין $y<x$ בפלט.

<u>הוכחה:</u>

כמו טענה 1.

<u>הוכחת המשפט:</u>

תהא J קבוצה קובעת מינימלית, כלומר כל $J'\subsetneq J$ אינה קובעת.

<u>טענה 3:</u>

קבוצה כזו קיימת (טענה 2) ואינה ריקה (טענה 1)

נניח J היא (y,x) - קובעת.

<u>טענה 4:</u>

$J=\{i_0\}$

<u>הוכחה:</u>

$J'=J\setminus\{i_0\}$

נניח ונגדיר [illegible] יהא $z\neq x,y$.

נסתכל בקלט הבא:

$$\begin{array}{ll} i_0: & x<y<z \\ J' & z<x<y \\ [n]\setminus J & y<z<x \end{array}$$

בקלט $y<x$ עבור כל J, הקלט ת"ב לקיים $z<y$ אחרת היינו מקבלים ש- $J'\subseteq J$ היא (z,y) קובעת (מטענה 2) בסתירה למינימליות J.

אנו מקבלים ש- $x<y<z$ אבל זה אומר ש- i_0 הוא (x,z) קובעת וזה שוב סתירה.

טענה 5:

i_0 היא (z,x)-קודקוד לכל z.

הוכחה:

נאבחן מקרה i_0 - אז $x<y$ (כי i_0 אוהבת ככה והיא (y,x)-קודקוד) ו- $z<y$ כי כולם חושבים ככה, לכן $z<x$ והיות שרק i_0 אוהבת ככה היא לא (z,x)-קודקוד.

טענה 6:

i_0 היא (y,z)-קודקוד לכל z,y שונים מ-x.

הוכחה:

i_0: $y<x<z$

$i\in[n]\setminus i_0$: $z<y<x$

בפרט $x<z$ כי i_0 חושבת ככה והיא (x,z)-קודקוד ו- $y<x$ כי כולם חושבים ככה, לכן $z<y$ בפרט. אבל i_0 היא היחידה שחושבת $z<y$ לכן היא (y,z)-קודקוד.

טענה 7:

i_0 היא (z,x)-קודקוד.

i_0: $z<y<x$

$i\in[n]\setminus i_0$: $y<x<z$

אז $z<y$ בפרט כי i_0 חושבת ככה והיא (z,y)-קודקוד. $x<y$ כי כולם חושבים ככה, לכן $x<z$ ולכן i_0 היא (z,x)-קודקוד. כי היא היחידה שחושבת ככה.

משפט Bollobás:

יהיו $A_1,\dots,A_k$ ו- $B_1,\dots,B_k$ הן קבוצות המקיימות את התנאים הבאים:

1) $A_i\cap B_i=\emptyset$ לכל $1\le i\le k$

2) $A_i\cap B_j\neq\emptyset$ לכל $1\le i\neq j\le k$

אז מתקיים $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\binom{a_i+b_i}{a_i}} \le 1$, $a_i=|A_i|$, $b_i=|B_i|$.

~~תזכורת~~ משפט Sperner:

אם $S_1,\dots,S_m$ אנטי שרשרת ב- $[n]$ אז $m \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

א"ש LYM:

אם $S_1,\dots,S_m$ אנטי שרשרת ב- $[n]$ אז:

$$\frac{m}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \le \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|S_i|}} \le 1$$

נשים לב א"ש LYM $\Leftarrow$ Sperner.

נשים לב ש- Bollobas $\Leftarrow$ LYM כי בהינתן אנטי שרשרת $S_1,\dots,S_m$ נגדיר $A_i=S_i$ ו- $B_i=[n]\setminus S_i$ אז $A_i\cap B_i=\emptyset$, $A_i\cap B_j\neq\emptyset$ אחרת $S_i\subseteq S_j$ ולכן $\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{\binom{a_i+b_i}{a_i}}\right) = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\binom{n}{|S_i|}} \le 1$.

<u>מסקנה:</u>

יהיו $|A_i|=a$ ו- $|B_i|=b$ אז אם תנאי המשפט מתקיים $k\le\binom{a+b}{a}$ ואפשר להגיע לזה עבור a,b.

ניקח דוגמא $n=a+b$ ולכן $A_1,\dots,A_{\binom{a+b}{a}}$ הן כל תתי הקבוצות בגודל a ו- B הן המשלימים.

<u>עובדה:</u>

ידוע שהמסקנה עדיין תקפה גם אם מחליפים את תנאי (ב) בתנאי (ב') $A_i\cap B_j\neq\emptyset$ לכל $i<j$ אבל אין הוכחה קומבינטורית לעובדה זו.

<u>הוכחת המשפט:</u>

נניח שיש הקבוצות $A_1,\dots,A_k$, $B_1,\dots,B_k \subseteq [n]$ נגדיר את P_i להיות אוסף הפרמוטציות של $[n]$ שבהן איברי A_i מופיעים לפני איברי B_i. אז:

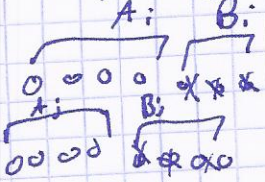
$$|P_i| = \binom{n}{a_i+b_i} a_i!\, b_i!\, (n-a_i-b_i)!$$

$$= \frac{n!\, a_i!\, b_i!\, (n-a_i-b_i)!}{(n-a_i-b_i)!\,(a_i+b_i)!} = \frac{n!}{\binom{a_i+b_i}{a_i}}$$

ברור ש: $\sum_{i=1}^{k}\frac{n!}{\binom{a_i+b_i}{a_i}}=\sum_{i=1}^{k}|P_i|=|\bigcup P_i|\le n!$

כי נשאר להראות ש- $P_i\cap P_j=\emptyset$.

נניח $\pi\in P_i\cap P_j$, א"ז ש- $A_i\cap B_j\neq\emptyset$ וכן שאחרי A_j לפני איברי B_j אך גם $A_j\cap B_j\neq\emptyset$ בסתירה.



הלמה של Littlewood-Offord

נניח $x_1,\dots,x_n\ge 1$. כמה וקטורים $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$ נותנים $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\in(a,a+2)$ עבור a מסוים?

טענה:

לא משנה מהם a או $x_1,\dots,x_n$, אין יותר מ- $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ וקטורים כאלה.
זה הדוק: לדוגמא אם $x_i=1$ אז יש $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ וקטורים שנותנים את אותו סכום (נניח $\frac{n}{2}$ אחדות והשאר -1).

הוכחה:

נניח $\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^m\in\{-1,1\}^n$ שונים עם $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^j_i x_i\in(a,a+2)$ לכל $1\le j\le m$.
צ"ל $m\le\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$. לכל ε^i ניתן להתאים (באופן חח"ע) את הקבוצה S_i ($x\in S_i$ אם $\varepsilon^i_x=1$).
נראה ש- $S_1,\dots,S_m$ היא אנטי-שרשרת. ולכן ממשפט Sperner נקבל $m\le\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$.
נניח $S_i\subseteq S_j$: $\sum_{t=1}^{n}\varepsilon^j_t x_t-\sum_{t=1}^{n}\varepsilon^i_t x_t=2\sum_{t\in S_j\setminus S_i}x_t\ge 2$ וזה לא ייתכן.

נניח $S_1,\dots,S_m\subseteq[n]$ היא קבוצה שנחתכת, כלומר $S_i\cap S_j\neq\emptyset$ לכל i,j.
ברור שיכול להיות $m\le 2^{n-1}$, לדוגמא אם ניקח את כל הקבוצות שמכילות את 1. זה גם לא ייתכן יותר כי לא ניתן לקחת קבוצה וגם המשלים שלה. נניח עכשיו שכל הקבוצות הן בגודל k, אז לא ניתן לקחת $m=\binom{n-1}{k-1}$,
אם יש לקחת 6 הקבוצות בגודל k שמכילות את 1.
נשים לב שאם $n<2k$ אז כל 6 קבוצות בגודל k נחתכות
ולכן ניתן לקבל $m=\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

משפט Erdos-Ko-Rado:

אם $k \le n/2$ ו- $S_1,\dots,S_m$ הן קבוצות נחתכות בגודל k אז $m \le \binom{n-1}{k-1}$.

<u>הוכחה:</u>

נניח שאנו מסדרים את $[n]$ על מעגל, נגיד ש- S_i שייכת למעגל אם ע"פ הסידור מופיעים באופן רצוף על המעגל.

<u>טענה:</u>

לכל סדר כנ"ל יש לכל היותר k קבוצות ששייכות אליו.

<u>הוכחה:</u>

ניקח קבוצה אחת ששייכת למעגל. כל השאר צריכות לחתוך אותה לכן יש $\le 2k-2$ כאלה אבל ניתן לחלק ל-$k-1$ זוגות זרים (כי $2k \le n$). לכן רק $k-1$ מהן שייכות למעגל הנתון. ~~[illegible]~~

כעת נספור את מספר הזוגות (S,C) כך ש- C הוא סידור מעגל ו- S היא קבוצה באוסף S_i ששייכת ל- C:

$$\sum_{S,C} \delta(S,C) \le k(n-1)!$$

אבל $\sum_{S,C} \delta(S,C) = m \cdot k!(n-k)!$ כי:

$$\sum_{S,C} \delta(S,C) = \sum_{\underset{(n-1)!}{C}} \Big(\underbrace{\sum_{S} \delta(S,C)}_{k} \Big) = \sum_{S} \Big(\underbrace{\sum_{C} \delta(S,C)}_{k!\,(n-k)!} \Big)$$

$$\Rightarrow \quad m \le \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$$