23/4/13

קומבינטוריקה בסיסית - הרצאה VI

ראינו בשיעור הקודם כי $\omega(P) \le \chi(P)$

משפט Mirsky: $\chi(P) \le \omega(P)$

קל לראות: $cp(P) \ge \alpha(P)$

משפט Dilworth: $cp(P) \le \alpha(P)$

משפט 1

בגרף מכוון חסר מעגלים מתקיים $\chi(E) \ge$ אורך המסלול הארוך ביותר.

משפט 2: Galli-Roy

בגרף מכוון $\chi(E) \ge$ אורך המסלול הארוך ביותר $= L(G)$

תרגיל

שימו לב כי הוכחת משפט 1 משתמשת בעובדה שהגרף חסר מעגלים.

הוכחת משפט 2

יהא G' תת-גרף חסר מעגלים מקסימלי של G.

היות ש-G' תת גרף של G מתקיים $L(G') \le L(G)$ לכן ממשפט 1

ניתן לצבוע את G' בלכל היותר $L(G') \le L(G)$ צבעים.

נראה שצביעה זו היא צביעה חוקית של G. קשתות של G

ששייכות ל-G' אין בעיה.

ניקח קשת $(x,y) \notin G'$ ונניח ששניהן נצבעו בצבע k.

כזכור מהוכחת משפט 1, זה אומר שהמסלול הארוך ביותר שמסתיים

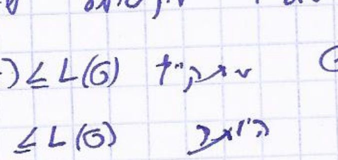
ב-x,y ב-G' הוא מאורך k. נניח שמסלולים אלה הן P_x, P_y.

היות ש-G' מקסימלי ללא מעגלים נובע ש-G' מכיל מסלול Q

מ-y ל-x (שסוגרת מעגל עם (x,y)). מסלולי Q ו-P_y זרים

אחרת נקבל מעגל ב-G'. לכן $Q \cup P_x$ הוא מסלול באורך $>k$

שיוצא מ-y.



משפט Hall

נניח G גרף דו-צדדי עם קבוצות A,B. אז G מכיל

זיווג המרווה את A $\Leftrightarrow$ $\forall_{S \subseteq A} \ |\underbrace{N(S)}_{\text{שכני } S}| \ge |S|$

משפט Konig:

לכל גרף דו"צ מתקיים $M(G)=VC(G)$ (= זיווג בגודל מקס')

נראה:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & \text{Hall} \arrow[r] & \text{Konig} \arrow[d] & \\ & \text{Konig} \arrow[u] & \text{Dilworth} \arrow[l] & {} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Hall:

אינדוקציה על $|A|$. אם $|A|=1$ ברור. נניח באינדוקציה לכל $|A'|<|A|$

(*) יש $S\subseteq A$ שמקיים $|N(S)|=|S|$. מכיוון ש-$|S|<|A|$ ניתן לזווג את קודקודי S ל-$N(S)$, לפי א"ה. עכשיו קל לראות שאחרי הורדת S ו-$N(S)$ עדיין מתקיים תנאי Hall ולכן מאינדוקציה ניתן לזווג את $A\setminus S$ ל-$B\setminus N(S)$.

(ב) נניח אין קבוצה כנ"ל. ניקח קשת (a,b) ונגיד ש-a מזווג ל-b. עכשיו קל לראות שאחרי הורדת (a,b) מהגרף עדיין מתקיים תנאי Hall (מכיוון שאנו לא במקרה (*)) ולכן מאינדוקציה ניתן לזווג את $A\setminus a$ ל-$B\setminus b$

■

Hall ⇐ Konig:

צ"ל בגרף דו"צ מתקיים $VC(G)\leq M(G)$.

נניח S הוא VC בגודל מינימלי בגרף. צריך לבנות זיווג בגודל $a+b$. נראה כיצד לבנות זיווג מ-$A'\subseteq A$ ל-$B\setminus B'$ (והכל מ-$B'\subseteq B$ ל-$A\setminus A'$), וכך "תן" זיווג בגודל $a+b$. לשם כך מספיק להראות ש-A' ו-$B\setminus B'$ מקיימות את תנאי משפט Hall. נניח התנאי לא מתקיים, כלומר יש $A''\subseteq A'$ כך ש-$|N(A'')|<|A''|$ אז נוכל להחליף VC קטן יותר ע"י החלפת A'' ב-$N(A'')$ וזו סתירה להנחה שה-VC $A\cup B$ הוא מינימלי.

Konig → Hall:

נניח גרף דו"צ על A,B מקיים את תנאי Hall. רוצים למצוא זיווג בגודל $|A|$. ממשפט Konig נובע שמספיק להראות שכל VC בגרף הוא בגודל $\geq |A|$. נניח VC מכיל k קודקודים ב-A (נסמנם ב-A') ו-t קודקודים ב-B (נסמנם ב-B') אז $N(A\setminus A')\subseteq B'$ אחרת זה לא היה VC. ולכן $|B'|\geq|A\setminus A'|=|A|-k$ (אחרת תנאי Hall לא היה מתקיים) ולכן ה-VC הנ"ל בגודל $\geq |A|$.

Dilworth → Konig

בהינתן גרף G על A,B, נשים לב ש- $\alpha(G) = n - vc(G)$

($\alpha(G)$ - הב"ת הכי גדולה בגרף) נכון לכל גרף.

טענה:

$$cp(G) = m(G) + n - 2m(G) = n - m(G)$$

ממשפט Dilworth נקבל ש: $n - m(G) = cp(G) \le \alpha(G) = n - vc(G)$

Konig → Dilworth

בהינתן P נגדיר גרף דו"צ על קבוצות A,B בגודל P כל

אחת, כך ש- $x \in A$ מחובר ל- $y \in B$ $\iff$ $x \le y$ ב- P.

צ"ל $cp(P) \le \alpha(P)$

טענה 1:

$cp(P) = n - m(G)$. נשים לב שקשתות של זיווג ב- G יוצרות כיסוי

של P במסלולים ולהפך. לכן מספיק להראות $n - m(G) \le \alpha(P) = n - vc(P)$

טענה 2:

$\alpha(G) \le n + \alpha(P)$.

מטענה 2 נקבל $\alpha(P) \ge n - vc(G)$ ונקבל $cp(P) = n - m(G) \overset{Konig}{\le} n - vc(G) \le \alpha(P)$

נוכיח את טענה 2:

אחרת, חייבים להשתמש ביותר מ- $\alpha(P)$ קודקודים משני צדי הגרף

ואז ניתן אנטי שרשרת גדולה $> \alpha(P)$ ב- P.

הוכחה ישירה של Dilworth

אם $\alpha(P) = k$ אז ניתן לכסות את P ב- k שרשראות. נוכיח

באינדוקציה על $|P|$:

ניקח איבר מקסימלי $a \in P$ ויהא $P' = P \setminus a$.

אם $\alpha(P') < k$ אז מאינדוקציה ניתן לכסות את P' על ידי $k-1$

שרשראות ועוד שרשרת באורך 1 אשר מכסה את a.

נניח מעכשיו ש- $\alpha(P') = k$, מאינדוקציה ניתן לכסות את P' על ידי

k שרשראות. נשים לב שהיות ו- $\alpha(P') = k$, בכל אחת מ- k

המסלולים/שרשראות יש קודקוד ששייך לאנטי שרשרת בגודל k.

לכל שרשרת i יהא a_i - האיבר המקסימלי ששייך לאנטי שרשרת

בגודל k.

טענה: $a_1,\dots,a_k$ הם אנט' שרשרת.

הוכחה: קל לראות.

מסקנה:

היות ש-$k = d(P)$, אחד הקודקודים $a_1,\dots,a_k$ מקיים $a \le a_i$. נניח $a_1 \le a$.
נגדיר את P הדרך של P (המעטה) הראשון ב-P שמסתיים ב-a_1
ונגדיר את Q להיות השרשרת $a+P$ אז $K \supset a(P\setminus Q)$ כי הורדנו
מ-P את איברי P שמשתתפים באנט' - שרשרת בגודל k.
מאינדוקציה ניתן לכסות את $P\setminus Q$ על ידי k שרשראות
ניקח עם Q נקבל כיסוי ב-k שרשראות. ∎

מה גודל האנט' שרשרת הגדולה ביותר ב-poset ה-$2^{[n]}$ (עם הכלה)?

כיוון אחד:

יש אנט' שרשרת בגודל $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ - פשוט ניקח את כל תתי הקבוצות בגודל $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

משפט Sperner

אין אנט' שרשרת גדולה ביותר.

טענה:

נניח G היא גרף דו"צ של A,B כך ש-$|A|\le|B|$ וכל קודקוד ב-A מדרגה a וכל הקודקודים B מדרגה b. אז G מכיל זיווג בגודל $|A|$.

הוכחה: תרגיל.

מסקנה 1:

נניח $k \le \frac{n-1}{2}$ אז ניתן למצוא פונ' חח"ע מאוסף הקב' בגודל k לאוסף הקב' בגודל $k+1$ כך ש $S \subseteq f(S)$.

הוכחה:

נגדיר גרף דו"צ עם צלעים A,B כך ש-A הן הקבוצות בגודל k, B הן הקבוצות בגודל $k+1$, אז $|A|\le|B|$ (כי $\binom{n}{k} \le \binom{n}{k+1}$) ו-$a\in A$ מחובר ל-$b\in B$ אם $a \subseteq b$, והגרף "רגולרי" כי כל קודקוד ב-A הוא מדרגה $n-k$ וכל קודקוד ב-B הוא מדרגה $k+1$, לפי טענה יש זיווג בגודל $|A|$ והוא מגדיר את f.

הוכחת משפט Sperner:

בהינתן אנט' שרשרת F נבנה פונ' חח"ע מ-F לאוסף תתי הקבוצות של $[n]$ מגודל $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

נתחיל מה-k הקטן ביותר עבורו F מכילה קבוצות בגודל k.
ממסקנה 1 ניתן למפות קבוצות אלה לקבוצות בגודל $k+1$ כך
שיתקיימו תנאי המסקנה. היות ש-F היא אנטי שרשרת, המיפוי
המבוקש הוא זיווג בגודל $|F|$, כי אם $f(S)=T$ עבור $T \in F$ אז
$S \subseteq f(S)=T$ וזו סתירה. באופן זה ניתן להרים את כל
הקבוצות של F מגודל $\le \frac{n}{2}$ עד לשכבה האמצעית, כנ"ל לגבי
הקבוצות הגדולות ביותר. $\square$

מסקנה: ניתן לכסות את $2^{[n]}$ על ידי $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ שרשראות.