9.04.1[redacted]

שיעור V

ראינו מספר דרכים להעריך (אסימפטוטית) סכומים/ביטויים קומבינטוריים נפוצים, ולפתור/להעריך נוסחאות נסיגה נפוצות.

דוגמה מהחיים:

רוצים למיין סדרה של n איברים.

Quick-Sort:

1) בחר איבר כלשהו p (pivot)
2) חלק את האיברים לאלו שקטנים ואלה שגדולים מ-p.
3) מיין את שני הקבוצות

- אם נבחר בגרוע p איבר מינ'/מקס' אז $T(n)=T(n-1)+(n-1)$

$T(n)=1+2+\dots+n-1=\Theta(n^2)$

- נניח שאנו יודעים לבחור p כך שמספר האיברים הקטנים ממנו הוא $\frac{n}{2}$. אז נקבל: $T(n)=2T(\frac{n}{2})+\Theta(n)=\,?$

נפתור בכמה דרכים:

הצבה

$T(n)=2T(\frac{n}{2})+n=$

$=2(2T(\frac{n}{4})+\frac{n}{2})+n=$

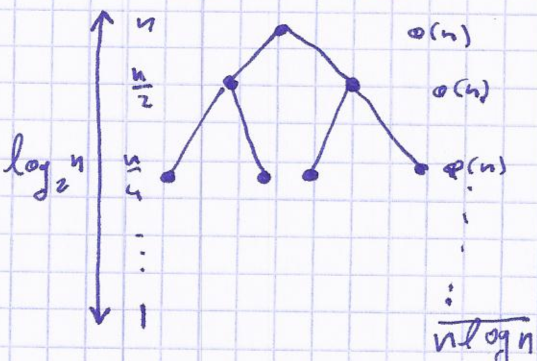
$=4T(\frac{n}{4})+2n=$

$=8T(\frac{n}{8})+3n=\dots=$

$=2^iT(\frac{n}{2^i})+in=$

$=nO(1)+n\log n=\Theta(n\log n)$

עץ רקורסיה



אינדוקציה

$T(n)\le cn\log n$

$T(2n)=2T(n)+2n\le$

$\underset{\text{הנחה}}{\le} 2cn\log n+2n\le$

$\underset{c\ge 1\ \text{עבור}}{\le} 2cn\log n+2cn=$

$=2cn(\log n+1)\le$

$\le c(2n)\log 2n$

מש"ל אינדוקציה.

דוגמה:

$T(n)=\sqrt{n}\,T(\sqrt{n})+n$

$T(n)=\sqrt{n}\,T(\sqrt{n})+n=\sqrt{n}(\sqrt[4]{n}\,T(\sqrt[4]{n})+\sqrt{n})+n=n^{3/4}T(n^{\frac{1}{4}})+2n=\dots=$

$=n^{1-\frac{1}{2^i}}T(n^{\frac{1}{2^i}})+in \overset{*}{=} \frac{n}{2}T(2)+n\log\log n=\Theta(n\log\log n)$

$n^{\frac{1}{2^i}}=2$ נגיע ל- $T(2)$:

$\frac{\log n}{2^i}=1$

$\Downarrow$

$i=\log\log n$

דוגמה:

$$T(n) = T(c\cdot n) + T((1-c)\cdot n) + n$$

עבור כל $0<c<1$ נקבל: $T(n) = O(n\log n)$

נסמן ב- $f(n)$ את מס' הצעדים של האלגוריתם QS.

מתקיים:
$$f(n) = n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f(k-1) + f(n-k)\right) = n + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

p=k ציר

$\underbrace{\qquad}_{k-1}$ k $\underbrace{\qquad}_{n-k}$

נניח באינדוקציה ש $\forall m\le n-1 \quad f(m)\le cm\log m$

$$f(n) = n + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \underset{\text{הנחה}}{\le} n + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} ck\log k = n + \frac{2c}{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} k\log k}_{g(n)}$$

<u>נסיון ראשון:</u>
$$g(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k\log k \le \sum_{k=1}^{n-1} k\log n = \log n\sum_{k=1}^{n-1} k \approx \frac{n^2}{2}\log n$$

ונקבל:
$$f(n) \le n + \frac{2c}{n}\cdot\frac{n^2}{2}\log n \Rightarrow f(n) \le n + cn\log n$$

אבל אנחנו רוצים $f(n)\le cn\log n$. לכן נרצה $g(n) = \frac{n^2}{2}\log(n) - \Theta(n)$

<u>נסיון שני:</u>
$$g(n) \sim \int_1^n x\log x\,dx \underset{\text{אינט' בחלקים}}{\Rightarrow} g(n) \sim \left(\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^n \approx \frac{n^2}{2}\log n - \frac{n^2}{4}$$

<u>נסיון שלישי:</u>
$$g(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k\log k \le \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} k\log\left(\frac{n}{2}\right) + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} k\log(n) \le$$
$$\le \left(\log(n)\cdot\sum_{k=1}^{n} k\right) - \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} k = \frac{n^2}{2}\log n - \frac{n^2}{8}$$

ואז נציב ונקבל $O(n\log n)$.

<u>חסם תחתון למיון:</u>

נניח שכל מה שהאלגוריתם עושה זה להשוות שני מספרים מהקבוצה ולקבל תשובה $(x_i > x_j) \vee (x_i \le x_j)$

<u>משפט</u>

כל מיון כנ"ל ת"ב לבצע $\Omega(n\log n)$ השוואות ובפרט זמן הריצה שלו הוא $\Omega(n\log n)$

<u>הוכחה</u>

נסתכל על $n!$ הקלטים שמורכבים מפרמוטציה של $[n]$.
ההבחנה העיקרית היא שלא ייתכן שעל שני קלטים שונים האלגוריתם ביצע את אותה סדרה של שאלות/תשובות.
נניח שהאלגוריתם אף פעם לא מבצע יותר מ-k השוואות.
במקרה זה יש לכל היותר 2^k מסלולים שונים, ולכן צריך להתקיים $n! \le 2^k$ כלומר $k \ge \log(n!) \sim n\log n$

<u>שאלה:</u>
נניח היינו מרשים לשאול לגבי i,j והיינו מקבלים שלוש תשובות:
1) $x_i = x_j$
2) $x_i < x_j$
3) $x_i > x_j$

תשובה: עדיין $\Omega(n\log n)$, נקבל מעץ קומר עם 3^k...

יחסי סדר חלקיים (Posets)

<u>יחס סדר:</u>

יחס סדר חלקי - טרנזיטיבי, אנטי-סימטרי ורפלקסיבי.
[תזכורת: אנטי-סימטרי: $(a\le b)$ וגם $(b\le a)$ $\Rightarrow$ $a=b$]
יחס סדר מלא - יחס סדר חלקי עבורו לכל a,b $a\le b$ או $b\le a$

<u>דוגמאות:</u>
1) יחס סדר של $\mathbb{N}$.
2) יחס הכלה חלשה של תת קבוצות של $[n]$.
יש 2^n איברים ו- $x\le y$ $\Leftrightarrow$ $x\subseteq y$
3) יחס העצפה עם מספר פרמטרים [מושג באחיד קבוצת החלטות]
4) יחס חלוקה $x|y$

בהינתן poset נגדיר יחס "בן-ישיר" $x\lessdot y$ אם $x<y$ ואין אף z המקיים $x<z<y$.

<u>טענה:</u>

לכל poset סופי $\le$ ניתן לשחזר את $\le$ מ- $\lessdot$.

<u>הוכחה:</u>
נראה ש $x\le y \Leftrightarrow$ יש $z_1,\dots,z_k$ כך ש- $x\lessdot z_1\lessdot z_2\lessdot\dots\lessdot z_k\lessdot y$
$\Leftarrow$ ברור שאם קיימים $z_1,\dots,z_k$ אז מטרנזיטיביות נובע ש- $x\le y$.
$\Rightarrow$ הוכחה באינדוקציה. סגרנו!

בהינתן poset P נגדיר גרף מכוון $G(P)$ שצמתיו הם איברי P ו- $x\to y$ אם $x\lessdot y$. אפשר להגדיר גם גרף של $\le$.
האחרונה נקראת דיאגרמת Hasse. נסמן $G'(P)$.

<u>הגדרות:</u>
- שרשרת (chain): נגיד ש- $x_1,\dots,x_n$ הם שרשרת אם $x_1<x_2<\dots<x_n$.
נשים לב ששרשרת יוצרת קליקה ב- $G(P)$, או מסלול בגרף של $\lessdot$ ($G'(P)$)
- אנטי שרשרת (anti-chain): נגיד ש- $x_1,\dots,x_n$ הם אנטי-שרשרת אם $x_i\not\le x_j$ לכל i,j. נשים לב שאנטי-שרשרת יוצרת קבוצה ב"ת

ב- $G(P)$, ועל ב- $\bar{G}(P)$.

- $\chi(P)$: המס' הקטן ביותר k כך שניתן לחלק את P ל-k אנטי-שרשראות. נשים לב ש- $\chi(G(P))=\chi(P)$. ($\chi(G)$ כיסוי $G(P)$ ב I.S)
- $\bar{\chi}(P)$: המס' הקטן ביותר k כך שניתן לחלק את P ל-k שרשראות. נשים לב ש- $\chi(\bar{G}(P))=\bar{\chi}(P)$ (= כיסוי $G(P)$ בקליקים)
- נגיד ש-x הוא איבר מינימלי אם אין z כך ש $z<x$.
- נגיד ש-x " " " מקסימלי " " " " $x<z$.
- נסמן ב- $\alpha(P)$ את גודלה של האנטי-שרשרת הארוכה ביותר [I.S in G(P)]
- נסמן ב $\omega(P)$ את אורכה של השרשרת הארוכה ביותר [Clique in G(P)]
- נגיד ש- x הוא איבר מינימום אם לכל y, $x\le y$.
- נגיד ש- x " מקסימום " " " $y\le x$.

<u>טענה:</u> לכל poset סופי יש איבר מינימלי.

<u>הוכחה:</u>
אם x מינימלי אז סיימנו. אחרת יש $y<x$ אז ניקח אותו ונמשיך. היות ש-P סופי או שנעצור באיבר מינימלי או שנגיע לאיבר שכבר ביקרנו. זה לא אפשרי.
[לא אפשרי כי זה סותר אנטי-סימטריות או טרנזיטיביות]
כמובן שזה לא מחייב שיש איבר מינימום.

<u>הגדרה:</u>
נגיד שיחס סדר מלא $\le'$ הוא linear-extension של P אם $x\le y \Rightarrow x\le' y$

<u>טענה:</u> לכל P סופי יש linear-extension.

<u>הוכחה:</u>
ברור שבסידור האיבר הראשון חייב להיות איבר מינימלי (לאו דווקא מינימום) ראינו כי תמיד קיים. ניקח איבר מינימלי ונציב במקום הראשון. נוציא אותו מ-P. נמשיך באינדוקציה.

<u>תרגיל:</u> לכל P ולכל x,y כך ש- $x\not\le y$, $x\not\ge y$ אז ל-P יש le בו $x\le' y$.

נרצה לבחון את הקשר בין $\chi(P)$ ל- $\omega(P)$: ברור ש $\chi(P)\ge\omega(P)$.

<u>משפט:</u> $\chi(P)=\omega(P)$ (כמובן שלגרפים רגילים ייתכן גם א"ש חזק)

<u>הוכחה:</u>

צ"ל: $\chi(P)\le\omega(P)$. נוכיח שקיימת צביעה מתאימה. בכל גרף חסר מעגלים מכוון (DAG). נצבע קודקוד v בצבע t אם המסלול הארוך ביותר שמתחיל בו ממנו הוא באורך t. אז אני משתמש ב $\le\omega(P)$ צבעים. כמו כן אם $x<y$ אז ברור ש-x ו-y קיבלו צבע שונה.
נשים לב שמה שהוכחנו זה שלכל G מכוון חסר מעגלים מכוונים (DAG) מתקיים $\chi(G)\le$ אורך המסלול המכוון הארוך ביותר ב-G.

מסקנה:

נשים לב ש- $\alpha(P) \ge \frac{n}{\chi(P)}$ ולכן $\alpha(P)\omega(P) \ge n$.

בפרט, לכל poset בגודל $st+1$ יש שרשרת באורך $s+1$ או אנטי שרשרת באורך $t+1$.

מסקנה:

הלמה של Erdos-Szekeresh:

בהינתן $x_1, \dots, x_{st+1}$ נגדיר ש- $x \preceq y$ אם $x \le y$ ו-x מופיע לפני y. ברור ששרשרת היא סדרה עולה ואנטי-שרשרת היא סדרה יורדת.