5/3/13

שיעור II

הערכות אסימפטוטיות

בהרבה בעיות קומבינטוריות לא נקבל תשובה מדויקת, אלא קירוב.

דוגמא: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$

הגדרה: טור הרמוני - $H(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

טענה: $\frac{1}{2}\lfloor\log n\rfloor \le H(n) \le \lfloor \log n\rfloor+1$

הוכחה:

$$\underbrace{1}_{S_1}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{S_2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{S_3}+\dots$$

נגדיר $S_k=\left\{\frac{1}{2^{k-1}+i}\right\}_{i=0}^{2^{k-1}-1}$.

נשים לב שמתקיים $\frac{1}{2} \overset{(**)}{\le} \sum_{x\in S_k} x \overset{(*)}{\le} 1$.

(*) $\underbrace{2^{k-1}}_{\#S_k}\cdot\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}}}_{\max S_k}=1$ חסם עליון

(**) $\frac{1}{2} = 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k} \le \underbrace{2^{k-1}}_{\#S_k}\cdot\underbrace{\frac{1}{2^k-1}}_{\min S_k}$ חסם תחתון

כמו כן נשים לב שמספר הקבוצות הרלוונטיות הוא $\log n$ ולכן

סכום כל ה-S_k-ים

$\frac{1}{2}\lfloor\log n\rfloor \le H(n) \le \lfloor\log n\rfloor+1$

מש"ל

תזכורת:

נגיד שפונקציה f היא $O(g)$ אם n_0 ו-C כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $f(n)\le C\cdot g(n)$

נגיד $f=\Omega(g)$ אם $g=O(f)$

נגיד $f=\Theta(g)$ אם $f=O(g)$ ו- $g=O(f)$

נגיד $f=o(g)$ אם $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$

נגיד $f=\omega(g)$ אם $g=o(f)$.

דוגמא:

- $\frac{n^4}{16}\le\sum_{\frac{n}{2}\le k}^{n} k^3 \le \sum_{k=1}^{n} k^3 = ? \le n^4 \Rightarrow K=\Theta(n^4)$ לפעמים נרצה להבין את הקבוע
- נרצה להעריך את $n!$ (למה נרצה להעריך? כי זה יסוד חשוב בקומבינטוריקה)

נוסחת סטירלינג: $n!\approx(1+o(1))\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow n!=\Theta\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$

חסמים ל- $n!$:

א) $2^{n-1} \le n! \le n^n$

ב) $n^{n/2}/2^{n/2} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \le n! \le \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}(n)^{\frac{n}{2}} = n^n/2^{n/2}$

ג) (קשה) $n^{n/2} \le n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

<u>הוכחה:</u>
נניח n זוגי

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-2)(n-1)n$

$\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2n}{2}$ $\ge n$ $=n$

<u>הערכת סכומים באמצעות אינטגרציה</u>

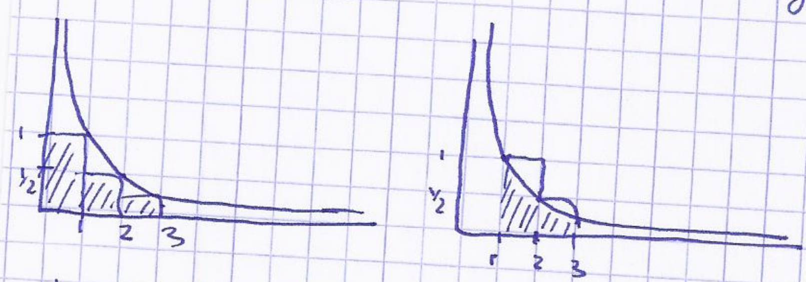
ד)

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow e^x \ge \frac{x^n}{n!}$

נציב $x=n$:
$e^n \ge \frac{n^n}{n!} \Rightarrow \left(\frac{n}{2}\right)^n \ge n! \ge \left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow \frac{n^n}{2^n} \ge n! \ge \frac{n^n}{e^n}$

<u>תזכורת:</u>
$\frac{1}{2}\log n \le H(n) \le \log n$

$f(x) = \frac{1}{x}$



$$H(n) \ge \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1)$$

מסקנה:
$\ln(n+1) \le H(n) \le \ln(n)+1 \quad \Rightarrow \quad |H(n)-\ln(n)| = \Theta(1)$

$\lim_{n\to\infty} |H(n)-\ln(n)| \longrightarrow \gamma = 0.577$

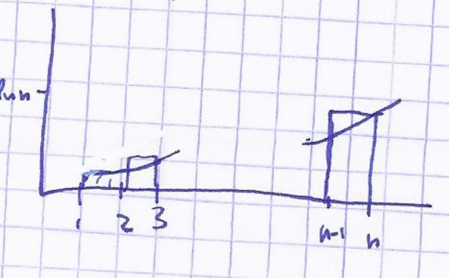
קירוב סטירלינג:

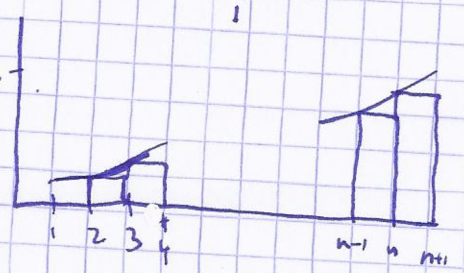
טענה:
$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

<u>הוכחה:</u>
נראה ש: $n\ln(n) - n + 1 \le \ln(n!) \le \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \ln(k)}^{f(n)} \le n\ln(n) - n + 1 + \ln(n)$

$f(n) \ge \int_1^n \ln(x)\,dx \quad x\ln x - x\Big|_1^n = n\ln n - n + 1$

$f(n) \le \ln n + \int_1^n \ln(x)\,dx$





~~תרגיל בית:~~
~~שני ל-~~
הוכח ש- $\Theta\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{2}\right)^n\right)$ -ל

טענה: $\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k$

הוכחה:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \ge \frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdots\frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k$$

$$\binom{n}{k} \le \frac{n^k}{k!} \le \frac{n^k}{\left(\frac{k}{e}\right)^k} = \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

איזה מבין המקדמים הבינומיים הוא הגדול ביותר? $\binom{n}{n/2}$ (נוכיח)

ננסה להעריך את $\binom{n}{n/2}$. $\frac{2^n}{n+1} \le \binom{n}{n/2} \le 2^n$

מהערכת שהוכחנו על $n!$ מקבלים ש: $\binom{n}{n/2} = \frac{n!}{\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2} = \Theta\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$

נניח אנו מטילים n מטבעות הוגנים. ההסתברות לקבל בדיוק k עצים היא $\frac{1}{2^n}\cdot\binom{n}{k}$. נקבל כעובדה שכאשר $k=\frac{n}{2}\pm\sqrt{n}$ עדיין מתקיים $\binom{n}{k}=\Theta\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$

עקרון שובך היונים

1) אם $S\subseteq[2n]$ ו- $|S|>n$ אז S מכילה זוג איברים x,y כך ש- $x|y$:

הוכחה:

לכל מספר אי זוגי a שבין 1 ל- $[2n]$ תהא S_a הקבוצה הנוצרת ע"י $a\cdot 2^i$. אז יש לנו n קבוצות S_a שמכסות את $[2n]$.

אם $|S|>n$ אז S מכילה שני מספרים $x<y$ מאותה קבוצה S_a ולכן $x|y$. וזה חסם הדוק.

2) אם $S\subseteq[2n]$ ו- $|S|>n$ אז S מכילה שני מספרים זרים מחלק משותף (כלומר $\neq 1$)

הוכחה:

S תכיל שני מספרים עוקבים. וזה חסם הדוק.

3) לכל גרף יש 2 קודקודים עם אותה דרגה.

הוכחה: ברור.

[ובכל זאת: דרגת כל קודקוד בין 0 ל: $\underbrace{n-1}_{n \text{ ערכים}}$. נניח בשלילה שאין 2 קודקודים עם אותה דרגה. יש n קודקודים ויש n דרגות אפשריות, מופיעה פעם אחת כל דרגה. ... דרגה 0. לכן אין קודקוד עם דרגה $n-1$. סתירה]

הלמה של Erdos-Szekeres: (או משהו כזה, היא בעצמה לא סגורה)

כל סדרה של $m=(n-1)^2+1$ מספרים שונים: $a_1,\dots,a_m$ מכילה
את סדרה עולה באורך n או את סדרה יורדת באורך n.

הוכחה:

לכל אחד מ-m המספרים נתאים זוג מספרים (u_i,d_i) כאשר:

u_i - אורך של הסדרה העולה הארוכה ביותר שמסתיימת ב-a_i

d_i - " " " היורדת " " "

נניח שאין את סדרה עולה/יורדת באורך n. אז ה הזוגות לקוחים
מ-$[n-1]^2$.

טענה: לכל זוג מספרים a_i,a_j מתקיים $(u_i,d_i)\neq(u_j,d_j)$.

הוכחה:

נניח $i<j$, $a_i<a_j$ אז $u_i<u_j$ כי ניתן לקחת את
הסדרה העולה הארוכה ביותר שמסתיימת ב-a_i ולהאריך ל-a_j
כנ"ל לגבי $a_j<a_i$ (כי אז נאריך את d_i ל-d_j)

תרגיל:

הוכיחו שהחסם זה הדוק, כלומר, יש סדרה באורך $(n-1)^2$ ללא
את סדרה עולה/יורדת באורך n.

משפט רמזי:

לכל t קיים $N=N(t)$ כך שבכל 2-צביעה של הקשתות
של K_N ניתן למצוא K_t מונוכרומטי.

דוגמאות: $N(2)=2$; $5<N(3)\le 6$. נוכיח.

הוכחה:

ניקח צומת כלשהו v והצבעים הקשתות שנוגעות בו. יש 5 כאלה.
לכן לפחות 3 מהן יש את אותו צבע. נניח צבע זה הוא שחור.
עכשיו נתבונן בקשתות בתוך $\{a,b,c\}$ [כנראה שהיא תגדיר את הקודקודים האחרים של הקשתות כ-$\{a,b,c\}$]
אם שלושתן לבנות אז יש K_3 לבן. אחרת, בה"כ (a,b) שחורה
אז (a,b,v) הוא K_3 שחור. [היא שכחה כאן ב.ה.כ. של (a,b), לא? ניחא]

$N(4)=18$

<u>הוכחה 1:</u>

נראה ש: $N(t)\le 4^t$, כלומר, כל צביעה של K_{4^t} בשני צבעים מכילה K_t מונוכרומטי. נבנה קבוצה של צמתים בגודל $2t-1$ כך שקבוצה זו תכיל בהכרח K_t מונוכרומטי.

1) ניקח צומת כלשהו v ונגדירו כ-x_1. אם רוב הקשתות שיוצאות ממנו צבועות בלבן, "נצבע" את x_1 בלבן ולא (=אחרת) בשחור.
אם צבענו בלבן, נגדיר את G_2 להיות השכנים u כך ש-(x_1,u) לבנה ולא (=אחרת) G_2 = השכנים u כך ש (x_1,u) שחורה. [היא ממש פיזית אותה]

2) נשים לב ש $|G_2|\ge 2^{2t-1}$. ניקח צומת x_2 צומת כלשהו ב-G_2 ונצבע אותו לבן/שחור לפי צבע רוב הקשתות שיוצאות ממנו (בתוך G_2) ונגדיר את G_3 בהתאם.

היות שכל איטרציה מקטינה את G_j בפקטור ≤ 2 ניתן להגדיר באופן זה $2t-1$ קודקודים $x_1,\dots,x_{2t-1}$ אז יש t מהם שצבועים באותו צבע וקל לראות שהגרף שנפרש על ידם הוא מונוכרומטי.

<u>הוכחה 2:</u>

נתבונן בצביעה כללית יותר. $R(s,t)=$ (המספר הקטן ביותר N כך שכל 2-צביעה של K_N מכילה K_s לבן או K_t שחור.)

נראה ש $R(s,t)\le\binom{s+t-2}{s-1}$

לכן נקבל בפרט $R(t,t)\le\binom{2t}{t}=\Theta\left(\frac{4^t}{\sqrt{t}}\right)$.

אם $s=2$ אז $R(2,t)\le t$

אם $t=2$ $R(s,2)\le s$

נוכיח שמתקיים (*) $R(s,t)\le R(s-1,t)+R(s,t-1)$
בהינתן טענה זו נקבל מאינדוקציה ש:

$$R(s,t)\le\binom{s+t-3}{s-2}+\binom{s+t-3}{s-1}=\binom{s+t-2}{s-1}$$

נוכיח את (*): ניקח קודקוד כלשהו v ונתבונן בקשתות שיוצאות ממנו. אז או ש-$R(s-1,t)$ מהן לבנות או ש $R(s,t-1)$ מהן שחורות. נניח שאנו במקרה הראשון. מאינדוקציה אנו יודעים שהשכנים שמחוברים בקשת לבנה מכילים K_t שחור (וסיימנו)

אז K_{s-1} לבן ויחד שמקבלים K_s לבן.

משפט: $R(t) \geq 2^{t/2}$. נראה שאם $\binom{m}{t} 2^{1-\binom{t}{2}} < 1$ (✱) אז $m < R(t)$

בכמה דרכים ניתן לצבוע את K_m בשני צבעים? $2^{\binom{m}{2}}$

כמה צביעות יש שמכילות K_t מונוכרומטי? $\leq 2\binom{m}{t} 2^{\binom{m}{2}-\binom{t}{2}}$

(✱) נקבל שמתקיים $2\binom{m}{t} 2^{\binom{m}{2}-\binom{t}{2}} < 2^{\binom{m}{2}}$ כלומר יש יותר צביעות

מצביעות עם K_t מונוכרומטי, כלומר יש אחת ללא K_t מונוכרומטי.

נותר לבדוק ש $m = 2^{t/2}$ מקיים את (✱).

$$\binom{m}{t} \cdot 2^{1-\binom{t}{2}} \leq \frac{m^t}{t!} \cdot 2^{1-\binom{t}{2}}$$

$$= \frac{2^{t^2/2} \cdot 2^{1+\frac{t}{2}}}{t!\, 2^{t^2/2}} = \frac{2^{t/2+1}}{t!} < 1$$