26/2/13

# קומבינטוריקה בסיסית

ד"ר אסף שפירא

5 תרגילי בית חובה. מבחן בית

כלל אצבע: "אל תגישו תרגיל שלא תרצו לבדוק"

## שיעור I

נתחיל עם תזכורת קצרה.

**א) מקדמים בינומיים:**

$\binom{n}{k}$ = מס' האופנים בהם ניתן לבחור k עצמים מתוך n עצמים
ללא חזרות וללא חשיבות לסדר.

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

הוכחה    סדרה של n עצמים

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{k}\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n-k}$$

**ב) ללא חזרות ויש חשיבות לסדר**

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

**ג) עם חזרות ועם סדר**

**ד) זהויות קומבינטוריות:**

1) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$   בחירה של k ≡ אי בחירה של n-k ≡ בחירה של n-k

2) $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$   מספר אופנים עבור ועדה מגודל k + יו"ר

3) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$   קבוצות שמכילות את n + קבוצות שלא מכילות את n

4) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$   מס' תת הקבוצות של $\{1,\dots,n\}$

5) $\sum_{i=1}^{n} i=\binom{n+1}{2}$   מס' הקשתות ב-$K_{n+1}$ (= גרף שלם על n+1 קודקודים)

6) בינום ניוטון: $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$

הוכחה א: באינדוקציה

הוכחה ב: מהגדרת $\binom{n}{k}$

נציב את נוסחת הבינום ל $y=1$, כלומר $(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

נגזור   $\otimes$   $n(x+1)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$

מהמקדם של $x^{k-1}$ בכל אחד מן הצדדים, בצד ימין $k\binom{n}{k}$, בצד שמאל $n\binom{n-1}{k-1}$

נקבל הוכחה נוספת לזהות (ב).

אם נציב $x=1$ ב- (*) נקבל את הזהות: $2^{n-1}\cdot n=\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$

$$(**)\quad \frac{n}{2}=\left(\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\right)\cdot\frac{1}{2^n}$$

שני הצדדים סופרים את מס' האפשרויות לבחור קבוצה + יושב ראש

7) או אם מסתכלים על זה כך:

$$\frac{n}{2}=\frac{\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}}{2^n} \leftarrow$$ תוחלת גודלה של תת קבוצה מקרית של $[n]$

8) אם נציב $x=-1$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0$$

מס' תת קבוצות בגודל זוגי = מס' תת קבוצות בגודל אי זוגי $=2^{n-1}$

נוכיח זאת ישירות ע"י bijection

א) אם $n$ אי זוגי ניתן להצמיד קבוצה $S$ ל- $[n]\setminus S$.

כלומר למשלים שלה.

ב) לכל קבוצה $S$ נצמיד את $f(S)$ כאשר

$$f(S)=\begin{cases} S\cup\{n\} & n\notin S\\ S\setminus\{n\} & n\in S\end{cases}$$

ברור ש- $f$ משנה את הזוגיות של $S$.

זה זיווג כי $f(f(S))=S$.

9) כמה תת קבוצות של $n$ ישנן בגודל $0 \pmod 4$ כאשר $n\equiv 0 \pmod 8$.

נראה שהתשובה היא: $2^{n-2}+2^{\frac{n}{2}-1}$

<u>הוכחה:</u>

נסמן ב- $A$ את מספר הקבוצות בגודל $0 \pmod 4$

נסמן ב- $B$ את מספר הקבוצות בגודל $2 \pmod 4$

אז $A+B=2^{n-1}$ (ראינו)

נראה ש- $A-B=2^{n/2}$

נתבונן בביטוי $(1+i)^n$, אז:

$n\equiv 0 \pmod 8$

$$(1+i)^n=(2i)^{n/2}=2^{n/2}\cdot(-1)^{n/4}=2^{n/2}$$

$$\| $$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k=(A-B)+(\ 0\ )\cdot i$$

10) לכל $k$, המכפלה של $k$ מס' עוקבים מתחלקת ב- $k!$.

נתבונן בביטוי: $\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=$ שלם

11) לבחור $n$ מתוך $k$ עם חזרות וללא סדר.

כלומר אנו שואלים כמה פתרונות במספרים שלמים ואי שליליים יש

למשוואה $x_1+x_2+\dots+x_k=n$

תשובה: $\binom{n+k-1}{k-1}$

הוכחה:

נספר $n$ כדורים שחורים + $k-1$ כדורים לבנים

$\underbrace{\quad}_{x_1} \dots \underbrace{\quad}_{x_k}$

שאלה 1: כמה פתרונות של $x_1+x_2+\dots+x_k \le n$ כאשר $x_i \ge 0$

שאלה 2: כמה פתרונות של $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ כאשר $x_i>0$

נראה ישירות שהתשובה לשאלה 2 היא $\binom{n-1}{k-1}$

תשובה: נספר $n$ כדורים שחורים בשורה ואז נבחר $k-1$ החוצצים מבין $n-1$ האפשרויות.

שאלה 3: להסיק את (12) משאלה (2).

12) כמה אפשרויות יש לסדר לכל היותר $n$ עצמים מתוך $[n]$ ללא חזרות ועם סדר.

$$f(n)=n!+n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\dots+n+1=n!\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}_{\sim e}\sim n!\cdot e$$

נראה שהתשובה היא בדיוק $en!$

ברור ש $f(n)\le en!$ לכן צ"ל שההפרש $\le 1$:

$$en!-f(n)=n!\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$$

$$=n!\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\dots\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots<$$

$$\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}=\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n}\le 1$$

13) מספר Bell = מס' יחסי השקילות השונים על $[n]$.

$B_0=1$

$B_1=1$

$B_2=2$

$B_3=5$

נוסחת נסיגה עבור $B_n$:

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}B_{n-k}$$

Multinomial Expansion:

$$(x_1+\dots+x_k)^n=\sum_{\substack{a_1,\dots,a_k\\ \sum a_i=n}}\binom{n}{a_1,\dots,a_k}x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}$$

נקרא ל $\binom{n}{a_1 \dots a_k}$ מקדם מולטינומי. נחשב למה שווה ביטוי זה:

$$\binom{n}{a_1, \dots a_k} = \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2} \cdot \binom{n-a_1-a_2}{a_3} \cdots \binom{a_{k-1}+a_k}{a_{k-1}} = \frac{n!}{a_1! \cdot (n-a_1)!} \cdot \frac{(n-a_1)!}{a_2! \cdot (n-a_1-a_2)!} \cdots \frac{(a_{k-1}+a_k)!}{(a_{k-1})! \cdot a_k!}$$

$$= \frac{n!}{a_1! \cdots a_k!}$$