28/11/2016

הרצאה 9 :

פרק 1 : דיון של העתקות חלקות

$f: M^m \to N^n$ חלקה.

זה נצרך

אימרסיה אם $D_pf: T_pM \to T_{f(p)}N$ חח"ע $(m \le n)$

סבמרסיה " " $D_pf: T_pM \to T_{f(p)}N$ על $(m \ge n)$

שיכון:

אימרסיה + $f: M \to f(M)$ הומאומורפיזם.

ראינו:

$f: M \to N$ רציפה, נאותה (proper), חח"ע $\Longleftarrow$

$f: M \to f(M)$ הומיאומורפיזם.

ראינו:

בקומפקט אימרסיה חח"ע היא שיכון.

תרגיל:

אימרסיה + $\dim M = \dim N$ $\Longleftarrow$ f פתוחה.

נראה:

סבמרסיה לוקלית "נראית" הטלה. (קיימות מפות (U,ϕ) סביב p, (V,ψ) סביב $f(p)$ כך ש- $\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ הטלה)

אימרסיה לוקלית "היא" שיכון. ($\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n$)

משפט: (חדו"א III)

$f: M \to N$ חלקה. $D_pf: T_pM \to T_{f(p)}N$ איזו' (קיים p).

אזי קיימת סביבה פתוחה O של p ב- M כך ש- $f(O)$ פתוחה

ו- $f|_O: O \to f(O)$ דיפאומורפיזם.

(תרגיל)

משפט:

$f: M \to N$ חלקה, $D_pf: T_pM \to T_{f(p)}N$ חח"ע (לאו דווקא על)

אזי קיימת סביבה פתוחה O של p כך ש-

$f|_O: O \to f(O)$ דיפאומורפיזם

סקיצה של ההוכחה:

נקח מפות, (U,ϕ) מפה של p, (V,ψ) מפה של $f(p)$

(מלעיל)

$$D_{\phi(p)}(\psi\circ f\circ\phi^{-1}) \text{ חח"ע} \overset{(*)}{\Longleftarrow} D_p f \text{ חח"ע}$$

נקח:

$$L=\mathrm{Im}(D_{\phi(p)}(\psi\circ f\circ\phi^{-1}))^{\perp}$$

ונגדיר:

$$F:\phi(U)\times L\longrightarrow\psi(V)$$

$$F(x,y)=\psi\circ f\circ\phi^{-1}(x)+y \quad (\text{חלקה})$$

נשים לב:

$$D_{(\phi(p),0)}F=D_{\phi(p)}(\psi\circ f\circ\phi^{-1})\oplus Id$$

איזומורפיזם.

ממשפט ההעתקה ההפוכה (חדו"א III) $\Longleftarrow$ קיימת סביבה $O_1\subset\phi(U)$

וקיימת סביבה $O_2\subset L$ כך ש- $F|_{O_1\times O_2}$ דיפאומורפיזם.

ולכן $F|_{O_1\times\{0\}}$ דיפאומורפיזם על התמונה.

$$F(x,0)=\psi\circ f\circ\phi^{-1}(x) \;!$$

$\Longleftarrow$ $\psi\circ f\circ\phi^{-1}|_{O_1}$ דיפאו על התמונה.

ψ,ϕ מפות $\Longleftarrow$ $f|_{\phi^{-1}(O_1)}\to f(\cdot)$ היא דיפאומורפיזם

■

טענה:

$f:M^m\to N^n$ חלקה, שיכון. $\Longleftarrow$ $f(M)$ תת יריעה חלקה של N

ו- f הוא דיפאו מ- M על $f(M)$.

(גם, בכיוון ההפוך זה עובד - העתקת השיכון מתת היריעה ליריעה השלמה היא שיכון)

הוכחה:

לכל נקודה $q\in f(M)$ קיימת נקודה יחידה $p\in M$ כך ש- $f(p)=q$

נבחר מערכת קואורדינטות $(V,y_1,\dots,y_n)$ סביב q קטנה מספיק

כך ש- $U=f^{-1}(V)$ מערכת קורדינטות סביב p.

נסמן אותה $(U,x_1,\dots,x_m)$. לשם נוחות, נניח שמדובר בכדורים פתוחים

סביב הנקודות כך ש- p,q "הם מרכזם".

הצמצום של f ל- U מתואר ע"י n פ' חלקות

$$y_i = f_i(x_1 \dots x_m) \quad i=1,\dots,n$$

למה? ← הדרגה של מטריצת יעקובי בנק' p היא m. (כי שיכון).

<u>אם $m=n$</u>:

אזי בתנאי III f היא דיפאו' (בסביבת p) ולכן סיימנו.

(כי התמונה פתוחה)

<u>אם $m<n$</u>:

נשנה את סדר הקואורדינטות על מנת להבטיח ש-

$$0 \neq \det\left(\frac{\partial f_i(p)}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,m},$$

<u>נגדיר</u>:

$$F=(F_1,\dots,F_n): U\times\mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(X,\omega) = (x_1,\dots,x_m,\omega_1,\dots,\omega_{n-m}) \in U\times\mathbb{R}^{n-m}$$

$$F_i(X,\omega) = \begin{cases} f_i(x) & i=1,\dots,m \\ f_i(x)+\omega_{i-m} & i=m+1,\dots,n \end{cases}$$ חלקות

היעקוביאן בראשית:

$$\left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{m\times m} & * \\ \hline 0 & Id \end{array}\right)$$

לא מתאפס בראשית.

לפי משפט הפונקציה ההפוכה, F היא דיפאו' בסביבה של הראשית. ולכן בסביבה מספיק קטנה $V'\subset V$ של $z=f(p)$

$$F^{-1}: V' \longrightarrow U\times\mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n$$

הזוג (F^{-1}, V') מהווה מפת קורדינטות

סביב הנקודה. במילים אחרות:

$$f(U)\cap V' = \{q'\in V' \mid \omega_1(q') = \dots = \omega_{n-m}(q') = 0\}$$ ← למה זה?

<u>הגדרה:</u>

$f:M\to N$ העתקה, $y\in N$ נקראת <u>ערך רגולרי</u> של f אם D_pf היא <u>על</u> לכל $p\in f^{-1}(y)$

אחרת הנק' נקראת נקודה "קריטית".

אנחנו תמיד נדבר על חשבים "יריעה" "קשירה"

<u>תוספת:</u>

$f:M\to N$ העתקה (M,N קשירות). $y\in N$ <u>ערך רגולרי</u>

אזי $f^{-1}(y)$ <u>הינו יריעה חלקה</u>. ; $\dim(f^{-1}(y))=\dim M-\dim N$

למה חשוב שהן "קשירות"?

<u>למה:</u>

$X\subset\mathbb{R}^k$, $Y\subset\mathbb{R}^l$ סביבות פתוחות של הראשית. נניח $k\geq l$

ו- $\pi:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^l$ <u>ההטלה</u>. (על l הקורדינטות הראשונות)

ונניח ש- $f:X\to Y$ העתקה, $f(0)=0$, D_0f על.

אזי יש סביבה פתוחה של הראשית ב- $O\subset X$ ודיפאו'

$F:O\to F(O)\subset\mathbb{R}^l\subseteq\mathbb{R}^k$ כך ש- $F(O)$ <u>פתוחה</u>, $F(0)=0$

ו- $f\circ F^{-1}=\pi$