22/11/2016 הרצאה 8:

פרק ה': $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$ אגד משיק Tangent bundle

ראינו: $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ של M $\Longrightarrow$ $\{(TU_\alpha,\tilde{\Phi}_\alpha)\}$ "אטלס" של TM

ראינו: שההעתקות הנ"ל מתאימות:

$\tilde{\varphi}_\alpha = (x_1,\dots,x_n,dx_1,\dots,dx_n) : TU_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$

הגדרה:

$Q\subset TM$ פתוחה אם לכל מפה $\varphi: Q\longrightarrow \mathbb{R}^n$ של M הקבוצה $\tilde{\Phi}(Q\cap TU)$ פתוחה.

תרגיל: להשתכנע שזה האוסדורף + 2 מנייה + טופולוגיה

נקודת מבט נוספת:

$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ אטלס. $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$d\varphi_\alpha : TU_\alpha \longrightarrow T\mathbb{R}^n = \varphi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^n$

ואז $\{(TU_\alpha, D\varphi_\alpha)\}$ זה האטלס שלנו.

הערה:

יש "דרך יחודה" להגדיר מבנה חלק על TM כך ש- $\pi: TM\longrightarrow M$ תהיה חלקה.

הגדרה (תרגיל)

$T^*M = \bigcup_{x\in M} T_x^*M$ cotangent bundle "אגד קו-משיק".

הערה:

Vector bundle

$$E \downarrow M \qquad T^*M \downarrow M \qquad TM \downarrow M$$

הגדרה:

אגד וקטורי חלק מדרגה K מעל יריעה $n+k$ מימדית $E \overset{\pi}{\downarrow} M$ (M יריעה n מימדית)

+ העתקה חלקה ועל $\pi: E\longrightarrow M$ כך ש:

1) $\forall x: \; E_x := \pi^{-1}(x) \subset E$ - k dimensional sub space

אלו הם הסיבים

2) $\forall x \in M$ יש סביבה פתוחה U ודיפאומורפיזם

$$\Psi: U \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(U) \subset E$$

כך ש-

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{R}^k \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

מתחלפת.

3) הצמצום לכל נק' $\{y\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ נותן העתקה ליניארית

$$\Psi: \mathbb{R}^k \cong \{y\} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(y)$$

הגדרה:

TM נקרא טריוויאלי אם יש דיפאומורפיזם

$$TM \cong M \times \mathbb{R}^n$$

$TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}^1$ → תרגיל בית

$TS^2 \ncong S^2 \times \mathbb{R}^2$ → להשתכנע.

$TS^3 \cong S^3 \times \mathbb{R}^3$

הגדרה: (נחזור לזה בהרצאה בהמשך)

שדה וקטורי חלק = העתקה: $X: M \longrightarrow TM$ כך ש- $\pi \circ X = Id$

(section)

* שימו לב לקשר למד"ר.

הגדרה:

TM ניתן למקבול (parallelizable) אם יש $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ שדות וקטורים כך ש- $\{X_{1,p}, \ldots, X_{n,p}\}$

נק' $X_i(p)$

מהווה בסיס ל- $T_p(M)$, $\forall p \in M$

תרגיל:

TM טריוויאלי אמ"מ ניתן למקבול

נסמן $\mathfrak{X}(M)$ את fore השדות הוקטורים של M

הערה:

TS^n טריוויאלי עבור $n = 0, 1, 3, 7$ קשור לאלגברה של $\mathbb{R}^{n+1}$ ש... מבנה של מכפלה ללא מחלקי אפס רק כאשר $n = 0, 1, 3, 7$

משפט: ("אי אפשר לסרק קיפוד")

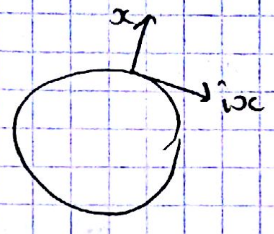
כל שדה וקטורי (רציף) על S^2 חייב להתאפס

הערות:

על S^{2n-1} יש שדה וקטורי (חלק) שלא מתאפס

$\subset \mathbb{R}^{2n} \subseteq \mathbb{C}^n$

$V(x) = ix$



הוכחה:

על S^{2n} לא יתכן. **רעיון:** אם היה כנ"ל V (נניח מנורמל)

$V(x) \perp x$ $\qquad h_t(x) = x\cos(\pi t) + V(x)\sin(\pi t)$

$\deg = 1 \to Id \sim \alpha(x) = -x \Leftarrow \deg = 1$

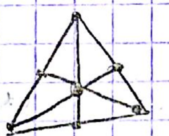
וזה לא יתכן $\qquad$ הומוטופיה חלקה

"הוכחה פיסיקאלית" ל-S^2

1) **אופיין אוילר** Δ $\qquad 2 = \chi(\Delta) = V - E + F$

פאות קשתות קודקודים

עידון של השילוש $\Delta' =$



$\chi(\Delta) = \chi(\Delta')$

$\chi(\Delta') = V' + E' + F'$

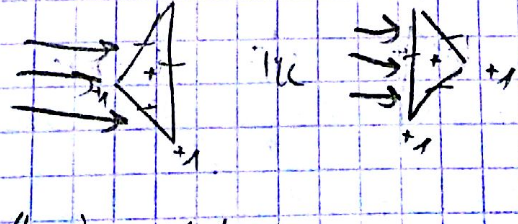
$+4 \quad +9 \quad +5$

2) נניח שיש שדה וקטורי רציף לא מתאפס.

נעדן את השילוש מספיק כך ש: הצלעות של Δ' הם "קווים ישרים"

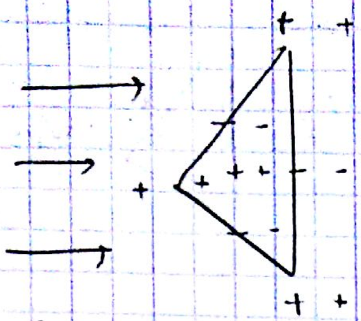
כך ש $V(p) \longrightarrow p$ "קבוע על הפאות"

פרטורבציה קטנה תבטיח לנו אף צלע לא משיקה לשדה.



$\sum (I_i) = \chi(\Delta')$

מפעילים את ה-"שטף"



$\chi(\Delta) = \chi'(\Delta) = 2$, $\sum'(\pm 1) = 0$

סתירה!

פרק ו': (מיון של העתקות בין יריעות)

$f: M \to N$ חלקה.

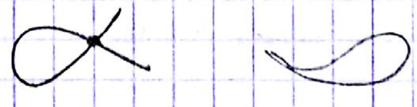
הגדרה (אימרסיה)

1) $f: M \to N$ נקראת אימרסיה בנק' p אם D_pf הוא חח"ע.
f אימרסיה אם זה נכון לכל $p \in M$

2) $f: M \to N$ נקראת סבמרסיה (submersion) בנק' $p \in M$ אם הדיפרנציאל הוא על. אם זה נכון לכל $p \in M$, f נקראת סבמרסיה.

3) f נקראת שיכון (embedding) (והתמונה $f(M) \subseteq N$ נקראת תת יריעה משוכנת) אם f הוא אימרסיה + ההעתקה:
$f: M \to f(M) \subseteq N$ היא הומאומורפיזם (ביחס לטופולוגיה המושרית)

מה ההבדל בין אימרסיה לשיכון?



תזכורת:
העתקה בין מרחבים טופולוגיים נקראת proper אם התמונה ההפוכה של קומפקט היא קומפקט.

תרגיל:
$f: M \to N$ רציפה, proper, חח"ע, M, N יריעות אזי $f: M \to f(M)$ היא הומאומורפיזם.

מסקנה:

העתקה חלקה בין יריעות חלקות חח"ע + קומפקט + אימרסיה היא שיכון.

תרגיל (חשוב):

אין אימרסיה בין S^1 ל- $\mathbb{R}$.

טענה (שימושית)

$f: N \to M$ אימרסיה חח"ע, N קומפקטי אזי היא שיכון.

הוכחה:

f רציפה חח"ע ועל התמונה שלה. צ"ל ש- f^{-1} רציפה.

נשים לב שכל קבוצה קומפקטית בהאוסדורף היא סגורה ועל תת קבוצה סגורה בקומפקט היא קומפקט. $X \subset N$ סגורה (קומפקט)

$\Rightarrow$ $f(X)$ קומפקטית ולכן סגורה.

דוגמאות: (תרגיל - להשתכנע)

1) $N = (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $M = \mathbb{R}^2$ $\quad f(t) = (\sin(2t), \cos(t))$

f אימרסיה חח"ע.

2) $f(x,y) = x$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ סבמרסיה.

3) $h: S^3 \to S^2$ (Hopf Map) $\quad S^2 \cong \mathbb{C}P^1$

$S^3 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$

חלקה, סבמרסיה. $\leftarrow$ $h(z_1, z_2) = [z_1 : z_2]$

משפט (אנלוג מחדו"א III):

משפט הפונקציה ההפוכה

$f: M \to N$ חלקה. קיימת נק' $p \in M$ כך ש- $D_p f: T_p M \to T_{f(p)} M$ היא איזומורפיזם. אזי קיימת סביבה O של הנק' p, כך ש- $f(O)$ פתוחה ו- $f|_O : O \to f(O)$ דיפאומורפיזם.

<u>משפט</u>:

$f: M \to N$ חלקה, $D_p f: T_pM \to T_{f(p)}N$ חח"ע (כבר לא באותו מימד)

אזי קיימת סביבה O של p כך ש-

דיפאומורפיזם – $f|_O : O \to f(O)$