21/11/2016

חסר הרצאה

הרצאה 7:

תזכורת: הגדרות של מרחב משיק

$$T_pM = \left\{ [\gamma] \;\middle|\; \begin{matrix} \gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M \\ \gamma(0)=p \end{matrix} \right\}$$ ← מרחב וקטורי ממימד n - בסיס

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right\}$$

$$T_pM = \left\{ \begin{matrix} v: C^\infty(M)\to\mathbb{R} \\ X_p: C^\infty(M)\to\mathbb{R} \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \text{לינאריות} \\ \text{"לייבניץ"} \end{matrix} \right\}$$ ← מ"ו ממימד n :

כל v ניתן לרשום:
$$v=\sum v(x_i)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p}_{\text{בסיס ממימד } n} \quad (*)$$

ההגדרות שקולות
$$[c] \longrightarrow D_c(f) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ c)$$

תרגיל: להשתכנע שזהו איזומורפיזם של מ"ו

פרק 3: דיפרנציאל:

$f: M\to N$ חלקה.
$$df: T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$
$$(df_p(v))(h) = v(h\circ f)$$
$$h\in C^\infty(N)$$

$f: M\to N$ חלקה משרה $f^*: C^\infty(N)\to C^\infty(M)$ ע"י הרכבה עם f.
$$f_*: T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$

הערות:

1) להשתכנע שההגדרה "תקינה"

2) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $\quad df_a = Df_a$ (כלומר שהדיפרנציאל כאן הוא שקול להגדרה של חדו"א 3)

כאשר מזהים $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$

3) $f: M\to\mathbb{R}$ $\quad df: T_aM\longrightarrow\mathbb{R}$

נסמן גם:

$v\in T_aM$, $\quad \overline{df_a}(v) = v(f)$. $\quad r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ה-r הזהות

$\forall x\in\mathbb{R}\ \left\{\frac{d}{dr}\Big|_x\right\}$ basis $T_x\mathbb{R} \Rightarrow (df_a(v))(r) = v(r\circ f) = v(f)$

4) מרחב קו-משיק: $T_p^*M = Hom(T_pM, \mathbb{R})$

פונקציונלים לינאריים על T_pM

בסיס: הקשורים $\{(dx_i)_p\}$ מהווים בסיס ל- T_p^*M

$$(dx_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$$

4') איך נראית df $(f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$ בבסיסים שונים.

(*) $$v = \sum (dx_i)_p(v) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$$

5) <u>כלל השרשרת</u> $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{H} Z$ (תרגיל)

6) $f: M \to N$ דיפאומורפיזם $\Longrightarrow$ df <u>איזומורפיזם</u>.

7) <u>אפשר היה באופן שקול להגדיר</u>:

$f: M\to N$, (U,ϕ) מפה ליד $p\in M$

(V,ψ) מפה ליד $f(p)\in N$

$$df_p := D_{\phi(p)}(\psi\circ f\circ \phi^{-1})$$

תרגיל - צריך לבדוק שבחירת מפות שונות המושג הנ"ל מוגדר היטב, <u>ומתלכד</u> עם ההגדרה שנתנו. (חשוב מהתרגיל להבין באיזה מובן מתלכד).

<u>פרק ה: [illegible]</u>: (אגד משיק)

ל- $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$ tangent bundle (אגד משיק) <u>יש מבנה חלק.</u>

$x \mapsto T_xM$

יש העתקה טבעית $\pi: TM \to M$. נקח מבנה חלק M ונמשוך אותו אחורה למבנה חלק ב- TM.

<u>הוכחה:</u> נשים לב שאם

<u>שלב 0</u>: ל- $U\subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אז $TU \overset{\text{זיהוי}}{\cong} U\times\mathbb{R}^n$

<u>שלב 1</u>: ב- M נקח מפה $\phi = (x_1,\dots,x_n): U\to\mathbb{R}^n$

נייצר מפה על TU יש n פ' הקואורדינטות "שבאות בחינם"

$x_1\circ\pi, \dots, x_n\circ\pi$

יש עוד n פונקציות שמגיעות מההצגה:

$$T_pM \ni V = \sum (dx_i)_p(v)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$$

נגדיר מפה: $\hat{\Phi} := (x_1 \circ \pi, \dots, x_n \circ \pi, dx_1, \dots, dx_n)$

$$\hat{\Phi} : TU \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$(p = \pi(v)$, $v \longmapsto (dx_i)_p(v)$ ---> לכן אלו קורדינטות dx_i

אם $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ אטלס של M

$\Longleftarrow$ אטלס של מפות $\{(TU_\alpha, \hat{\varphi}_\alpha)\}$

טענה:

זה "אטלס" של TM (הכוונה שהמפות הללו מתואמות)

נקח 2 מפות בעלות חיתוך לא ריק.

$(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$

$(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ $\quad U \cap V \neq \emptyset$

כקבוצות $\emptyset \neq T(U \cap V) = TU \cap TV$

נסמן:

$\hat{\varphi} := (x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n) : TU \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$\hat{\psi} := (y_1, \dots, y_n, dy_1, \dots, dy_n) : TV \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

נחשב את $\hat{\psi} \circ \hat{\varphi}^{-1}$

$$\hat{\varphi}^{-1}(r_1, \dots, r_n, u_1, \dots, u_n) = \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\varphi^{-1}(r_1, \dots, r_n)} \in T_{\varphi^{-1}(r_1 \dots r_n)} M$$

מרכיבים:

$$\hat{\psi} \circ \hat{\varphi}^{-1}(r_1, \dots, r_n, u_1, \dots, u_n) = \left(\psi(\varphi^{-1}(r_1, \dots, r_n)), dy_1\left(\sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right), \dots, dy_n\left(\sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)$$

נשים לב ש-

$$dy_j\left(\sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum u_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(y_j)\right) = \sum \frac{\partial y_j}{\partial x_i} u_i =$$

$$= \sum_{i=1} \frac{\partial}{\partial r_i} \left(r_j(\psi \circ \varphi^{-1})\right) u_i$$

קיבלנו:

חלק ← $$\tilde{\psi}\circ\tilde{\varphi}^{-1}(r_1,\dots,r_n,u_1,\dots,u_n) = \left(\psi\circ\varphi^{-1}(r),\ \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)(r)\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}\right)$$

קיבלנו אוסף של מפות מתואמות... ועכשיו נגדיר טופולוגיה.