הרצאה 5 : 14/11/2016

בפעם שעברה: חלוקת יחידה.

ראינו: X פרה קומפקטית, רגולרית, נורמלית;

<u>משפט:</u> (חלוקת היחידה)

יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ כיסוי פתוח של M אזי קיימת משפחה של פ' חלקות $\{f_\alpha : M\to[0,1]\}_{\alpha\in A}$ כך ש- 1) $\operatorname{supp} f_\alpha \subseteq U_\alpha$

2) הכיסוי $\{\operatorname{supp}(f_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ הוא סופי מקומי.

מס' סופי של אינדקסים $\quad \forall x\in M\ \exists W_x$ open nbg s.t $f_\alpha|_W \neq 0$

3) $\forall x\in M\ \sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x)=1$

בפעם שעברה ראינו הוכחה במקרה ש- M קומפקט.

מודולו הלמה של אוריסון. $M=U_1\cup\dots\cup U_n$

$$\overline{W_k}\subseteq V_k\subseteq\overline{V_k}\subseteq U_k$$

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}1 & x\in\overline{W_k}\\ 0 & x\in M\setminus V_k\end{cases} \leftarrow \text{אוריסון}$$

$$\psi_k(x)=\frac{\varphi_k(x)}{\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)}\qquad \sum\psi_k(x)=1$$

<u>סקיצה של הלמה של אוריסון</u>

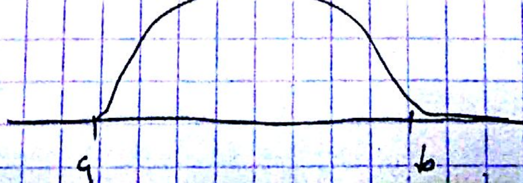
$$h(t)=\begin{cases}e^{-1/t^2} & t\neq0\\ 0 & t=0\end{cases}\ ,\quad h\in C^\infty \text{ אבל לא אנליטית}$$

נפצל אותה:

$$h_+(t)=\begin{cases}e^{-1/t^2} & t>0\\ 0 & t\le0\end{cases}\qquad h_-(t)=\begin{cases}e^{-1/t^2} & t\le0\\ 0 & t\ge0\end{cases}$$

$$k(t):\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$$

$$k(t)=h_-(t-b)\,h_+(t+a)\ \in C^\infty$$



$Q = \prod^{n}(\alpha_i,\beta_i)$ ב-$\mathbb{R}^n$

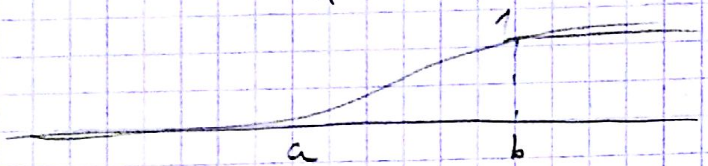
קיימת פי חלקה: $g:\mathbb{R}^n \to [0,1]$, $g>0$ על Q

ו- $g|_{\mathbb{R}^n\setminus Q} = 0$

$$g(x_1,\dots,x_n) = k_1(x_1)k_2(x_2)\cdots k_n(x_n)$$

נגדיר:

$l:\mathbb{R}\to[0,1]$ $\qquad l(t) = \dfrac{\int_a^t k(x)\,dx}{\int_a^b k(x)\,dx}$



<u>טענה:</u>

$K\subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית, U סביבה פתוחה של K אזי קיימת

פי חלקה: $f:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ כך ש- $f|_K = 1$

ו- $f|_{\mathbb{R}^n\setminus U} = 0$

<u>הוכחת הטענה:</u>

$\forall x\in K$. נקח קוביה פתוחה A_x סביב x המוכלת ב-U

$(\bar{A}_x \subseteq U)$

מהטענה הקודמת $\Longrightarrow$ $g_x:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ חלקה חיובית על A_x ומתאפסת "בחוץ"

K קומפקטית $\Longrightarrow$ תת כיסוי סופי $G = g_{x_1}+\dots+g_{x_m}$

נסמן $\delta = \min_K G$ $\qquad \mathrm{supp}(G)\subseteq \bar{A}_{x_1}\cup\dots\cup\bar{A}_{x_m}$

נקח $l(t)$ כמו קודם עם $a=0,\ b=\delta$,

להשתכנע ש- $f = l\circ G:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ היא מה שהיה צריך להוכיח.

הערה:

ניתן להכליל את הטיעון הזה לפונקציות חלקות:

M יריעה (U,φ) מפה $V\subset U$ פתוחה כך ש-

$V\subseteq\bar{V}\subseteq U$. אזי קיימת פ' חלקה: $f:M\to[0,1]$

$$x\in V \quad f(x)=1 \quad \text{s.t}$$

$$\forall x\notin U,\ f(x)=0$$

[illegible]

מסקנות מחלוקת היחידה:

1) אינטגרציה $\int_{\mathbb{R}^n} g=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum f_\alpha\right)g=\sum\int_{U_\alpha}$.

* הרעיון של יריעה - לוקאלית נראות כמו $\mathbb{R}^n$ אבל צריך למצוא דרך "לחבר" את החלקים ביחד.

2) **תרגיל:** $K\subset M$ סגורה. קיימת פ' חלקה C^∞ $f:M\to[0,1]$ כך ש-: $f^{-1}(0)=K$

3) לכל יריעה יש מטריקה רימנית

4) כל יריעה ניתנת "לשיכון" ב-$\mathbb{R}^N$ $1\ll N$ (כלומר עם N מספיק גדול)

רעיון ההוכחה 4:

<u>M קומפקטית</u> (U_i,φ_i) מפות (אוסף סופי)

נקח חלוקת יחידה $\{\alpha_i\}$ מתאימה.

$$h_i(x)=\begin{cases}\alpha_i(x)\cdot\varphi_i(x) & x\in U_i\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$g: M\longrightarrow\mathbb{R}^{N+N\dim(M)}.$$

$$x\longmapsto(\alpha_1(x),\dots,\alpha_N(x),h_1(x),\dots,h_N(x))$$

תרגיל: g סגורה. (חשוב בשביל מושג השיכון)

חח"ע? $\forall j.\ \alpha_j(x)=\alpha_j(y) \Longleftarrow g(x)=g(y)$

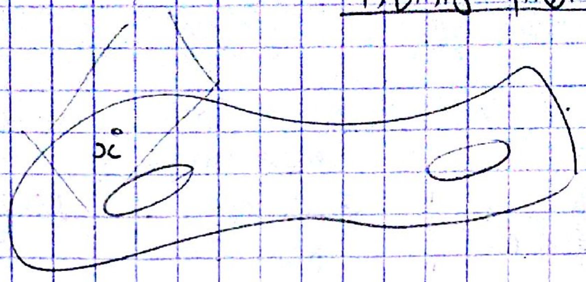
נקח j עבורו $\alpha_j(x)>0$ (יש אחד כזה לפחות)

כעת: $\cancel{\alpha_j(x)}\varphi_j(x)=\cancel{\alpha_j(x)}\varphi_j(y) \Longleftarrow h_j(x)=h_j(y)$

$\Longleftarrow x=y$ כי φ_i injective.

פרק 3: מרחב משיק ליריעה

אינטואיציה:



"אוסף המרחבים המשיקים הוא יריעה חלקה".

לכל נק' נתאים מ"ו (מרחב משיק בנקודה) - אין התשובה הנכונה למה.

עוד קצת אינטואיציה: הגדרה גיאומטרית:

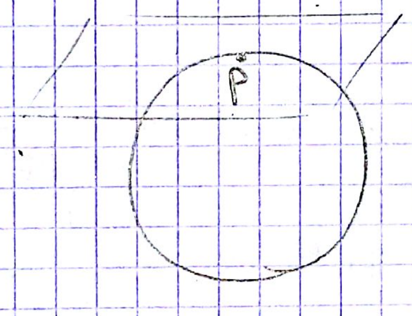
ב- $\mathbb{R}^n$:
$$T_x\mathbb{R}^n := \left\{ \gamma'(0) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma:(-\varepsilon,\varepsilon) \xrightarrow[\text{חלקה}]{} \mathbb{R}^n \\ \gamma(0) = x \end{array} \right\}$$

מרחב משיק ל- $\mathbb{R}^n$ בנק' x.

שימו לב: $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$

דוגמה:

$S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$



$$T_p S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, p\rangle = 0 \}$$

כל מסילה על הספירה מקיימת $|\gamma|^2 = 1$

$$\frac{d}{dt}|\gamma|^2\Big|_{t=0} = 2\langle \gamma'(0), p\rangle = 0$$

בכיוון השני, אם $v \perp p$: $\gamma(t) = \cos(t|v|)p + \sin(t|v|)\frac{v}{|v|}$