7/11/2016 הרצאה 3:

פרק א: יריעות טופולוגיות

פרק ב: יריעות חלקות.

יריעה חלקה ממימד $n$ היא יריעה טופולוגית $n$-מימדית המצויידת במחלקת שקילות של אטלסים/אטלס מקסימלי.

$(M,[A])$, $(M,\bar{A})$. $A$ או $\bar{A}$

**הגדרה 1:**

$f: M\to\mathbb{R}$ נקראת חלקה אם לכל $x\in M$ יש מפה $(U,\varphi)\in A$ כך ש- $x\in U$ ו- $f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\mathbb{R}$ חלקה (חדו"א III)

**הגדרה 2:**

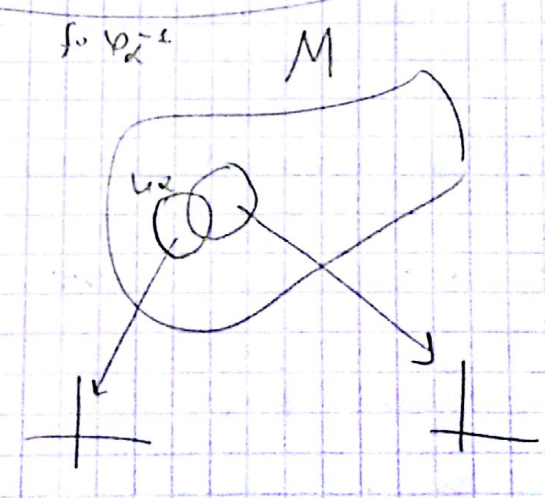
$f: M\to\mathbb{R}$ חלקה אם לכל $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in A$ ההרכבה $f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha)\to\mathbb{R}$ חלקה.

**טענה:** ההגדרות שקולות.

נקח $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ מפה כלשהי, ונקח $x\in U_\alpha$. "מהנתון" נובע שיש מפה סביב $x$ $(U_\beta,\varphi_\beta)$ כך ש- $f\circ\varphi_\beta^{-1}:\varphi_\beta(U_\beta)\to\mathbb{R}$ חלקה.

נשים לב ש: $f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd}
\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta) \arrow[r, "\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}"', "\text{חלקה}"] \arrow[rr, bend right, "f\circ\varphi_\alpha^{-1}"'] & \varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta) \arrow[r, "f\circ\varphi_\beta^{-1}", "\text{חלקה}"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$




ולכן $f\circ\varphi_\alpha^{-1}$ חלקה. וזה נכון לכל נק' $x\in U_\alpha$ ולכן $f\circ\varphi_\alpha^{-1}$ חלקה ב- $\varphi_\alpha(U_\alpha)$.

נתונות 2 יריעות חלקות $(M,\mathcal{A})$ ו- $(N,\mathcal{B})$

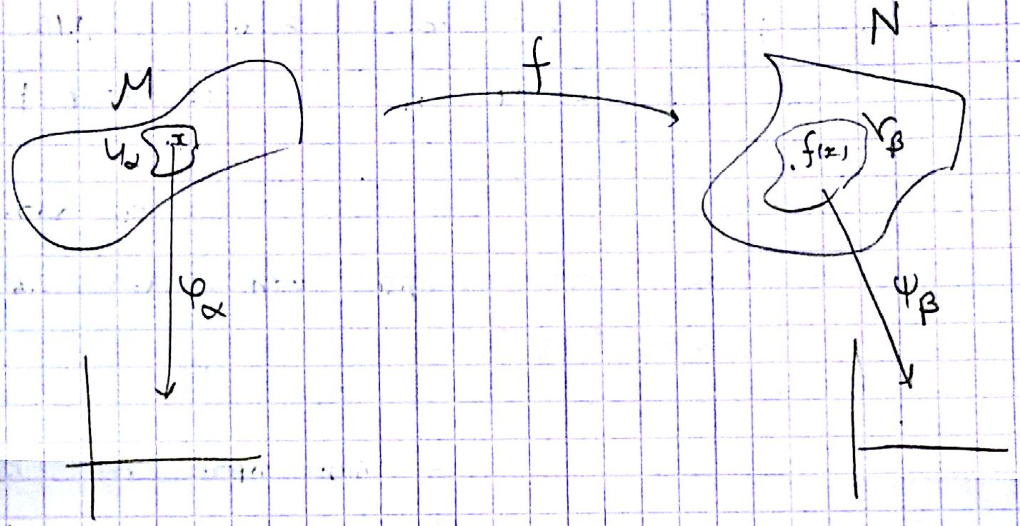
<u>הגדרה:</u>

$f: M \to N$ נקראת חלקה אם:

לכל נקודה $x \in M$ יש מפה $(\varphi_\alpha, U_\alpha) \in \mathcal{A}$ סביב $x$. ומפה $(V_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{B}$ סביב $f(x)$. כך ש- $f(U_\alpha) \subseteq V_\beta$

<u>וכן:</u>

$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \psi_\beta(V_\beta)$ חלקה.




<u>הגדרה 2:</u>

$f: M \to N$ כנ"ל חלקה אם לכל זוג מפות $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$, $(V_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{B}$, כך ש- $f(U_\alpha) \subseteq V_\beta$ מתקיים ש-

$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \psi_\beta(V_\beta)$ חלקה.

<u>הערות:</u>

1) שתי ההגדרות האחרונות שקולות (תרגול: אותו טיעון כמו קודם)

2) $f: M \to N$ <u>רציפה</u> נקראת חלקה אם: ...

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(U_\beta)) \longrightarrow \psi_\beta(f(U_\alpha) \cap U_\beta)$$

3) "חלקות $\Longleftarrow$ רציפות". רמז: $f|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$

$(U, \varphi)$ מפה סביב $p$. $(V, \psi)$ מפה סביב $f(p)$.

4) לא תמיד קיים מבנה חלק על יריעה טופולוגית. נכון (קיים <u>ויחיד</u>) עבור $\leq 3$

למשל על $S^7$ יש 15 מבנים חלקים שונים. על $\mathbb{R}^4$ יש $\infty$ (מבנים אקזוטיים)

לא דוגמא:

$\mathbb{R}$, $A_1=(\mathbb{R}, Id)$, $A_2=(\mathbb{R}, h(x)=x^3)$ לא שקולים.

טענה:

$(\mathbb{R},A_1) \cong (\mathbb{R},A_2)$ דיפאומורפים (קיימת העתקה $u: (\mathbb{R},A_2)\to(\mathbb{R},A_1)$, $u^{-1}: (\mathbb{R},A_1)\to(\mathbb{R},A_2)$ כך ש- $u, u^{-1}$ חלקות).

$f:(\mathbb{R},A_1)\to(\mathbb{R},A_2)$, $f: x\to x^3$

$f$ חלקה: $\iff$ $h^{-1}\circ f\circ Id: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חלקה.
$f^{-1}$ חלקה: $\iff$ $Id^{-1}\circ f^{-1}\circ h$ חלקה.
} העתקות הזהות $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ והן חלקות.

5) הרכבה של חלקות היא חלקה. העתקת הזהות היא חלקה, מכפלה של יריעות חלקות היא חלקה.

6) המושג תת יריעה חלקה קצת פחות אינטואיטיבי.

להבין את ההגדרה עם הנ'

תהי $M^m$ יריעה חלקה ממימד $m$. נאמר שתת הקבוצה $N\subset M$ היא תת יריעה $n$-ממדית של $M$ אם:

$$\forall x\in N.\ \exists \text{ chart } \underset{x\in U}{(U,\phi)} \text{ of } M \text{ s.t. } U\cap N = \phi^{-1}(\mathbb{R}^n) = \phi^{-1}(\mathbb{R}^n\times\{0\})$$

$$\phi(U\cap N) = \phi(U)\cap\mathbb{R}^n = \{x\in\phi(U) \mid x_{n+1}=\dots=x_n=0\}$$

להוכיח את הטענה הנ'

טענה:

$N$ היא יריעה חלקה.

סקיצה:

$$A=\{U_x\cap N, \phi|_{U\cap N} \mid (U_x,\phi) \text{ chart in } M \text{ near } x\in N \text{ s.t. } \phi^{-1}(\mathbb{R}^n)=U\cap N\}$$

- להשתכנע שזה אטלס טופולוגי.
- מדוע הם מתואמות? $(\phi,U,V)$ מפה של $M$ $\quad X:=U\cap N$

$Y:=\pi\circ\phi(X)$

$\pi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ הטלה סטנדרטית:

$\psi=\pi\circ\phi$

$j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ שיכון של $\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}^m$.

$(\psi,X,Y)$ מפה של $N$

$$\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1} = \pi\circ\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1}\circ j$$

כלומר

# <u>תזכורת מחדוא 3</u>:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, חלקה, 0 ערך רגולרי (הדיפרנציאל הוא על) אזי

$f^{-1}(0)$ תת יריעה של $\mathbb{R}^n$ ממימד $m-n$

(ממשפט הפונקציה הסתומה, יש סביבה שבה התמונה ההפוכה היא גרף של

פונקציה: $\exists U \subseteq \mathbb{R}^{m-n}, V \subset \mathbb{R}^m$ s.t. $f^{-1}(0) \cap \{U \times V\} = \{(u, f(u)) \mid u \in U\}$

מה נותן לנו קורדינטות מקומיות ליד $x \in f^{-1}(0)$)

<u>דוגמאות</u>:

1) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ תת יריעה חלקה ממימד $n$: $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}$

חלקה על $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. מספיק למצוא כיוון שבו הנגזרת הכיוונית לא אפס

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x+tx) = \dots = 1$$

2) $SL(n, \mathbb{R})$ יריעה חלקה (תת יריעה חלקה של $\mathbb{R}^{n^2}$ ממימד: $n^2-1$)

ע: $f(A) = \det(A)$. $f: \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ חלקה, וכמו קודם יש כיוון שבו הנגזרת הכיוונית $\neq 0$.

3) $O(n)$ $(AA^T = I)$ יריעה חלקה. ממימד $\frac{n(n-1)}{2}$

נגדיר: $f: \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ , $f(A) = A \cdot A^T$ . $O(n) = f^{-1}(I)$

(מטריצות כלשהן) מטריצות סימטריות

<u>תרגיל</u>:

$$DF_A(H) = HA^T + AH^T$$

(<u>שריק</u>: נקח $H = KA$. $DF_A(KA) = K + K^T$)

לכל מטריצה סימטרית $S$, נקחת $k = \frac{S}{2}$ (מנסים להוכיח שהדיפרנציאל הוא על)

קיבלנו: מימד: $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$