24/1/2017 חסר הרצאה

הרצאה 26:

בסוף השיעור שעבר: (למת ה- zig-zag)

השלב האחרון בהוכחה:

הסדרה: $\ldots \xrightarrow{j} H^n(A^*) \xrightarrow{a^n} H^n(B^*) \longrightarrow \ldots$ מדויקת.

$\delta[c] \in H^n(A^*)$. נראה: $a^n\delta[c] = [d\beta_{n-1}] = 0$

$$\Downarrow$$
$$\mathrm{Im}(\delta) \subseteq \mathrm{Ker}(a^n)$$

הכיוון השני: הבניה נותנת: $a^n\alpha_n = d\beta_{n-1}$. ניקח $b^{n-1}\beta_{n-1}$.

$$\delta b^{n-1}\beta_{n-1} = \left((a^n)^{-1} \circ \underbrace{d \circ (b^{n-1})^{-1}\big)\, b^{n-1}\beta_{n-1}}_{a^n\alpha_n}\right. = \alpha_n$$

שימוש: "Mayer-Vietoris"

משפט:

M יריעה חלקה אוריינטבילית. $U,V \subset M$ פתוחות כך ש- $M = U \cup V$

אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ יש העתקה:

$$\delta : H^n_{dR}(U \cap V) \longrightarrow H^{n+1}_{dR}(M) \quad \text{(connecting homomorphism)}$$

כך ש:

$$\ldots \xrightarrow{\delta} H^n_{dR}(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H^n_{dR}(U) \oplus H^n_{dR}(V) \xrightarrow{i^* - j^*} H^n_{dR}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}_{dR}(M) \rightarrow$$ מדויקת.

$$\begin{tikzcd}
U \cap V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & U \arrow[d, "k"] \\
V \arrow[r, "l"] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Lambda^n(M) \arrow[r, "k^*"] \arrow[d, "l^*"'] & \Lambda^n(U) \arrow[d, "i^*"] \\
\Lambda^n(V) \arrow[r, "j^*"] & \Lambda^n(U \cap V)
\end{tikzcd}$$

הוכחה:

מלמת ה- zig-zag נובע שמספיק להראות שהסדרה הבאה:

$$0 \longrightarrow \Lambda^n(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \Lambda^n(U) \oplus \Lambda^n(V) \xrightarrow{i^* - j^*} \Lambda^n(U \cap V) \longrightarrow 0$$ סדרה מדויקת קצרה.

נבדוק את שלושת התנאים:

I) $k^* \oplus l^*$ חח"ע. ניקח $\omega \in \Lambda^n(M)$. נניח: $(k^* \oplus l^*)(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V) = 0$

$\Longrightarrow \omega = 0$ (כי $U \cup V = M$)

II) נראה הכלה כפולה:

$$(i^*-j^*)(k^*\oplus l^*)(\omega)=(i^*-j^*)(\omega|_U,\omega|_V)=\omega|_{U\cap V}-\omega|_{U\cap V}=0$$

$$\Downarrow$$

$$Im(k^*\oplus l^*)\subseteq ker(i^*-j^*)$$

ניקח $(\omega,\omega')\in ker(i^*-j^*)$. $\left(i^*\omega=j^*\omega'\right)\Longleftarrow\ \omega|_{U\cap V}=\omega'|_{U\cap V}$

לכן קיימת תבנית σ על M כך ש: $\sigma|_V=\omega'$, $\sigma|_U=\omega$

$$\left(\sigma=\begin{cases}\omega & \text{on } U\\ \omega' & \text{on } V\end{cases}\right)$$

III) נראה שהוכחות ש- i^*-j^* הוא על. ניקח "חלוקת יחידה" $\{\phi,\psi\}$ עבור הכיסוי $\{U,V\}$

תהי $\omega\in\Lambda^r(U\cap V)$. נגדיר:

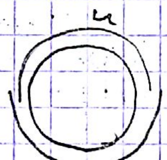
$$\eta=\begin{cases}\psi\cdot\omega & U\cap V\\ 0 & U\setminus supp\,\psi\end{cases},\qquad \eta'=\begin{cases}-\phi\omega & U\cap V\\ 0 & V\setminus supp\,\phi\end{cases}$$

קיבלנו $(i^*-j^*)(\eta,\eta')=i^*\eta-j^*\eta'=\psi\omega-(-\phi\omega)=\omega$

ולכן היא על וסיימנו. ■

שאלה: סטוקס אפסיים?
אותו דבר עם S^n

דוגמא:



$M=S^1$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} & & \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} \\ 0 & \rightarrow & H^0(S^1) & \rightarrow & H^0(U)\oplus H^0(V) & \rightarrow & H^0(U\cap V)\rightarrow \end{array}$$

(כמרחב וקטורי)

$$\xrightarrow{d} H^1(S^1)\rightarrow \underbrace{H^1(U)\oplus H^1(V)\rightarrow H^1(U\cap V)}_{\text{poincare}}\rightarrow H^2(S^1)\rightarrow\ldots$$

$$?\qquad\qquad 0\oplus 0\qquad\qquad 0\qquad\qquad 0$$

תרגיל ← בהגדרה של סדרה מדויקת, נקבל שעבור: $0\rightarrow A^1\rightarrow A^2\rightarrow\ldots$

מתקיים: $(-1)^k\dim A^k=0$.

ומכאן נקבל ש- $\dim H^1(S^1)=1$.

<u>שימוש נוסף של Mayer-Vietoris</u>

<u>למת החמישה:</u>

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \xrightarrow{\gamma} & D & \xrightarrow{\delta} & E \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e \\ A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C' & \xrightarrow{\gamma'} & D' & \xrightarrow{\delta'} & E' \end{array}$$

מדויקת, קומוטטיבית

אם a,b,d,e איזומורפיזמים $\Longleftarrow$ c איזומורפיזם

Poincaré duality:

$\omega\in\Omega^n_c(M)$ ($H^*_c(M)$ - הקוהומולוגיה המתאימה של תבניות עם תומך קומפקטי)

$$\int : H^k_{dR}(M)\oplus H^{n-k}_{dR}(M)\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$(\omega,\eta)\longrightarrow\int\omega\wedge\eta$$

פונקציונאל לינארי:

$I: H^k_{dR}(M)\longrightarrow (H^{n-k}_c(M))^*$ וזה איזומורפיזם.

<u>סקיצה של הוכחה:</u>

$$\begin{tikzcd}
H^{k-1}_{dR}(U)\oplus H^{k-1}_{dR}(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{k-1}_{dR}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "I_{U\cap V}"] & H^k_{dR}(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d, "I_{U\cup V}"] & H^k_{dR}(U)\oplus H^k_{dR}(V) \arrow[r] & H^k_{dR}(U\cap V) \\
(H^{n-k+1}_{dR}(U))^*\oplus(H^{n-k+1}_{dR}(V))^* \arrow[r] & (H^{n-k+1}(U\cap V))^* \arrow[r] & \dots & &
\end{tikzcd}$$

מלמת החמישה נקבל שאם $I_{U\cap V}$, $I_U\oplus I_V$ איזומורפיזמים

$\Longleftarrow$ $I_{U\cup V}$ איזומורפיזם

<u>טענה (ללא הוכחה):</u>

אם ליריעה יש "כיסוי טוב" $\longleftarrow$ I_M איזומורפיזם. (כיסוי טוב הוא כיסוי כך שכל חיתוך סופי שלו $U_1\cap\dots\cap U_k$ הוא כוויץ.)

<u>what next?</u> (personal opinion)

⊙ mfd + extra structure - Lie group $M=G$

$\mathfrak{g}=T_eG$ Lie Alg.

(מהות יעקבי- קרקטריזציה אינפיניטסימלית של הסימטריות של G).

במקרה הזה יש דרך טבעית לזהות את כל המרחבים המשיקים T_xM

<u>טענה:</u>

בהינתן $\mathfrak{g}$ קיים ויחיד G כך ש $\mathfrak{g}=T_eG$

<u>טענה:</u>

$H\lhd G \Longleftarrow G/H$ יריעה. (מרחבים הומוגניים)

⊙ complex mfd:

הגדרה "דומה": הפעם המפות בי-הולומורפיות.

$\partial+\bar{\partial}$ - Dolbeault cohomology

<u>לא אינווריאנט טופולוגי</u> (תלוי במבנה המרוכב)

⊙ Vector bundles: TM, tensor bundle $(\Lambda^k(M))$ (locally free sheaf)

invariants called characteristic classes $\in H^*_{dR}(M)$

- **<u>Mfld with special tensors</u>**
  - Riemannian geometry. (Geodesic, metric, curvature) - all these measure distance from euclidean structure

- Thm [Gauss - Bonnet] (M^2, g)

$$\int_M \text{s.c.} \quad \text{topological invariant}$$

s.c. = sectional curvature

"יהלום הכתר של המתמטיקה במאה ה-19"

- **<u>Symplectic "Geometry"</u>** Hamiltonian - Dynamics - השפה <u>הנכונה</u> לדבר על - $\boxed{\varphi^* \omega = \omega}$

$M \quad T_xM, \ \langle \cdot, \cdot \rangle$

$T_xM \quad \omega(\cdot, \cdot) \leftarrow$ אנטי-סימטריות לא מנוונות

$\text{Symp}(M, \omega) = \{ \varphi \mid \varphi^* \omega = \omega \} \leftarrow$ חבורת Lie ∞-מימדית

- **<u>Almost complex str.</u>**

$T_xM : J_x^2 = -Id$

almost complex structure is a complex str iff $\square = 0$

- Atiyah - Singer index theorem - based on all of the above

הנושא מרשים של המתמטיקה במאה ה-20.