17/1/2017

הרצאה יב:

אינטגרל:

$$\int : \Omega^n_c(M^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

מעכשיו M^n אוריינטבילית.

משפט Stokes:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

$\omega \in \Omega^{n-1}_c(M)$, M^n אוריינטבילית, ∂M^{n-1} אוריינטציה מ- M.

נתחיל עם $M = \mathbb{R}^n$. בה"כ $\omega = f(x)\, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$

$d\omega = \partial_1 f\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_1 f\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \underset{\text{fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \partial_1 f\, dx_1}_{=0} = 0$$

$=0$ מכיוון ש- $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ - f בעלת תומך קומפקטי.

נבדוק את $M = H^n$. נוח לחשוב על השפה כך:

$$\partial H^n = \{x_1 = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

(חצי המישור העליון)

מקרה א: $\omega = f(x)\, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$

כמו קודם:
$$\int_{H^n} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \int_{-\infty}^{0} \partial_1 f\, dx_1 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$
$$= \int_{\partial H^n} \omega$$

מקרה ב:

בה"כ: $\omega = f(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$

$T_x H^n = \{ ? \}$ תרגיל

$$\omega\big|_{\partial H^n} = 0$$

כאשר הכוונה היא ש- ω מצומצמת למרחב המשיק של ∂M^n

Scanned by CamScanner

מצב שני:

$$\int_{H^n} d\omega = \int dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{n-1} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \partial_n f\, dx^n}_{=0}$$

<u>באופן כללי עבור יריעה M כלשהי:</u>

$\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ כיסוי פתוח (אטלס) + חלוקת יחידה $\{f_\alpha\}$.

$$\omega = \sum f_\alpha \omega$$

(חלוקת יחידה נותנת לנו להפוך את המשפט מגלובאלי למקומי).

ולכן מספיק להוכיח את הטענה עבור $M=\mathbb{R}^n$ או $M=H^n$ (ס"מט)

$$\int_M d\omega \underset{\text{הגדרה}}{=} \sum_\alpha \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (\phi_\alpha^{-1})^* d(f_\alpha\omega) \underset{\text{דף תרגיל 8}}{=} \sum_\alpha \underbrace{\int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} d\left((\phi_\alpha^{-1})^*(f_\alpha\omega)\right)}_{H^n \text{ או } \mathbb{R}^n} =$$

לפי המקרים שהוכח

$$= \sum_\alpha \int_{\partial\phi_\alpha(U_\alpha)} (\phi_\alpha^*)^{-1}(f_\alpha\omega) = \sum_\alpha \int_{\phi_\alpha(\partial M\cap U_\alpha)} (\phi_\alpha^{-1})^*(f_\alpha\omega) = \int_{\partial M}\omega$$

<u>מסקנות:</u>

← $f,g\in C^\infty(G)$, $\gamma=\partial G$, $G\subset\mathbb{R}^2$ תחום חסום.

$$\alpha = f\,dx + g\,dy$$

<u>משפט Green:</u>

$$\int_\gamma f\,dx + g\,dy = \int_G \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx\wedge dy$$

← $\mathbb{R}^n$, Ω תבנית נפח. V שדה וקטורי.

$d(i_V\Omega)$ - תבנית נפח.

$$\operatorname{div}(V) = \nabla\cdot V := \frac{d(i_V\Omega)}{\Omega} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

<u>תרגיל:</u>

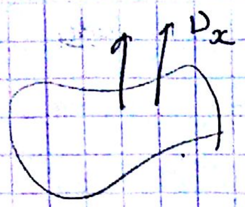
$\Omega = dx\wedge dy\wedge dz$. $V=(V_x,V_y,V_z)$

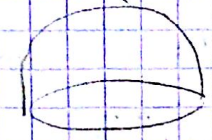
$$i_V\Omega = i_V dx\wedge dy\wedge dz - dx\wedge i_V dy\wedge dz + dx\wedge dy\wedge i_V dz =$$

$$= V_x\, dy\wedge dz - V_y\, dx\wedge dz + V_z\, dx\wedge dy$$

$$d(i_V\Omega) = \ldots = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz$$

תרגיל (להוכיח את משפט ה- Div)





$G^n \subset \mathbb{R}^n$ יריעה עם שפה.

ν_x נורמל חיצוני ל- ∂G

(על השפה יש אוריינטציה מושרית).

$n-1$ תבנית $\leftarrow$ $\theta := i_{\nu_x}\omega_0$

(כאת "האוריינטציה" על השפה)

תרגיל:

$$\int_{\partial G} \langle \nu_x, V\rangle \theta = \int_G \operatorname{div}(V)\,\omega_0$$

מסקנה נוספת מ- STOKES: M קומפקטית, N קומפקטית (לא דרושה הכרחית)

M^n, N^n אוריינטביליות (קשירות). $\omega \in \Omega^n_c(N)$. $f: M \to N$ חלקה.

טענה:

משפט הדרגה:
$$\int_M f^*\omega = \deg(f)\int_N \omega$$

למה:

נניח $M^n = \partial X^{n+1}$, $F: X \to N$ מרחיבה את f. $f: M^n \to N^n$

$\omega \in \Omega^n(N)$ אז $\int_M f^*\omega = 0$.

הוכחה:

$$\int_M f^*\omega = \int_{\partial X} F^*\omega \overset{\text{stokes}}{=} \int_X dF^*\omega = \int_X F^* d\omega = 0$$

מסקנה:

$f_1, f_2 : M \to N$ הומוטופיות $\Longleftarrow$ $\int_M f_1^*\omega = \int_M f_2^*\omega$ $\quad \forall \omega \in \Omega^n(N)$

סיבה:

$F: M \times \{0,1\} \to \mathbb{R}$ הומוטופיה בין f_1 ל- f_2.

$$0 \overset{\text{למה}}{=} \int_{\partial(M\times\{0,1\})} F^*\omega = \int_{M\times\{0\}} F^*\omega - \int_{M\times\{1\}} F^*\omega = \int_M f_1^*\omega - \int_M f_2^*\omega$$

למה:

y ערך רגולרי של $f:M\to N$ אזי יש סביבה U של y

כך שלכל תבנית $\omega\in\Omega^n(N)$ <u>עם תומך ב-U</u> מתקיים:

$$\int_M f^*\omega = \deg(f)\int_N \omega$$

(גרסה לוקאלית של משפט הדרגה)

הוכחה:

ממשפט טריוויאליות התקליטים $\Longleftarrow$ $f^{-1}(y)=\{x_1,\dots,x_n\}$ (M קומפקטית)

(תרגיל: יריעה קומפקטית ממימד אפס היא מספר סופי של נקודות)

$f_i:U_i\longrightarrow U$ דיפאו (f_i צמצום של f ל-U_i)

$$\int_M f\omega = \sum_i \int_{U_i} f^*\omega \underset{(*)}{=} \sum_i \varepsilon(f_i)\int_{U_i}\omega = \deg(f)\int_N \omega$$

למה: לעבור מלוקלי לגלובלי:

נקח ערך רגולרי y כמו קודם. (עם סביבה U).

לכל $z\in N$ יש איזוטופיה חלקה שמחברת את y ו-z

$$h_t^z: N\times[0,1]\longrightarrow N$$

$$h_0^z = Id,\quad h_1^z(y)=z$$

נתבונן ב-$\{h_1^z(U)\}_z$ זה כיסוי פתוח של N. (נעבור לתת כיסוי סופי (קומפקטיות): $h_1(U),\dots,h_k(U)$

נבחר חלוקת יחידה ביחס לכיסוי $\rho_1,\dots,\rho_k$

ונפרק: $\omega=\sum \rho_k\omega$.

מהגדרה:

$$\int_M f^*\omega = \sum_i \int_M f^*\underset{(\rho_i\omega)}{\underset{\parallel}{\omega_i}}$$

נשים לב ש: $h_i\circ f$ הומוטופי ל-f. $h_i(U)$ כמו בלמה הקודמת עבור $h_i f$ ($\operatorname{supp}\omega_i\subseteq h_i(U)$)

מהלמות הקודמות:

$$\int_M f^*\omega_i = \int_M (h_i\circ f)^*\omega_i = \deg(h_i\circ f)\int_N \omega_i = \deg(f)\int_N \omega_i$$

למה על הומוטופיה   למה קודמת

נסכום ונקבל משל.

■

אפשר בעזרת הטענה האחרונה להוכיח למשל את משפט גאוס-בונה.

<u>למה:</u>

$$0 \longrightarrow A^* \longrightarrow B^* \longrightarrow C^* \longrightarrow 0$$

סדרה מדויקת קצרה של קו-שרשראות.

אזי לכל $n\in\mathbb{Z}$ קיים connecting homomorphism:

$$\delta: H^n(C^*) \longrightarrow H^{n+1}(A^*)$$

כך ש: הסדרה הבאה <u>מדויקת</u>:

$$\dots \xrightarrow{d} H^n(A^*) \xrightarrow{a^n} H^n(B^*) \xrightarrow{b^n} H^n(C^*) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A^*) \xrightarrow{a^{n+1}} \dots$$

<u>הגדרה:</u> מ"נ

$C_* = \{(C_n, \partial_n) \mid n\in\mathbb{Z}\}$ שרשרת. $\partial_n: C_n \longrightarrow C_{n-1}$ $\partial_{n-1}\circ\partial_n = 0$

$C^* = \{(C^n, d^n) : d_n: C^n \to C^{n+1}\}$ קו שרשרת

$f: C_* \longrightarrow D_*$ chain map לאות סדרת העתקות

דיאגרמה קומוטטיבית:

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & C_{n-1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n-1} \\ D_n & \longrightarrow & D_{n-1} \end{array}$$

<u>הגדרה:</u>

chain - homotopy: $f: C^* \longrightarrow D^*$, $g: C^* \longrightarrow D^*$

קיימת סדרה: $S_n: C^n \longrightarrow D^{n-1}$ כך שעבור c^*, d^* מתקיים:

$$d^{n-1}\circ S^n + S^{n+1}\circ C^n = g^n - f^n$$

הסבר:

מוטיבציה להגדרה:

$$f^n[\omega] - g^n[\omega] = (f^n - g^n)[\omega] = (d^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ c^n)[\omega] =$$

$$= d^{n-1} s^n[\omega] + s^{n+1} c^n[\omega]$$

Scanned by CamScanner