16/1/2017

חסרה הרצאה

הרצאה 22:

בפעם שעברה: $H^*_{dR}(M)$

דוגמאות: $H^*_{dR}(S^1)$, $H^*_{dR}(\mathbb{R}^n)$

היום:

אינטגרציה של תבניות דיפרנציאליות

נתחיל:

$O\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה. $\omega\in\Omega^n_c(O)$ n-תבניות בעלות תומך קומפקטי

$$\left(\omega = f(x)dx_1\wedge\dots\wedge dx_n,\ f\in C^\infty_{\underset{\text{קומפקטי}}{c}}(O)\right)$$

$$\int_O \omega := \underbrace{\int_O f(x)dx}_{\text{מחדו״א 3}}$$

(ניתן להרחיב את ההגדרה ל- $\int_{\mathbb{R}^n}\omega$)

למה ההגדרה "טובה"?

טענה:

$F:\Omega\longrightarrow O$ דיפאו, C^1, $O,\Omega\subset\mathbb{R}^n$ פתוחות.

$\omega\in\Omega^n_c(O)$.

$$\int_\Omega F^*\omega = \varepsilon\int_O \omega$$

$$\varepsilon := \begin{cases} +1 & \text{שומרת אוריינטציה } F \\ -1 & \text{אחרת} \end{cases}$$ (בהתאמה אם F שומרת אוריינטציה)

הוכחה:

נסמן $\omega_0 = dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$, $\bar{\omega}_0 = F^*\omega_0$

תזכורת:

$$\bar{\omega}_0(\xi_1,\dots,\xi_n) = \omega_0(F_*\xi_1,\dots,F_*\xi_n) \overset{\text{תרגיל}}{=} \det(F_*)\,\omega_0(\xi_1,\dots,\xi_n)$$

כעת $\omega = f\omega_0$ $(f\in C^\infty_c(O))$ פונקציה כלשהי

$$F^*\omega \underset{\text{תרגיל}}{=} F^*(f)F^*(\omega_0) = F^*(f)\det(F_*)\,\omega_0$$

לפי הגדרה: $\varepsilon = \mathrm{sgn}(\det(F_*))$

נשתמש במשפט של החלפת משתנים באינטגרל מחדו"א III: $(*)$

$$\int_\Omega F^*\omega = \int_\Omega F^*(f)F^*(\omega) = \int_\Omega f\circ F(x)\,\varepsilon\, J_F(x)\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^n \overset{(*)}{=}$$

$$= \varepsilon\int_U f(x)\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^n \underset{\text{הגדרה}}{=} \varepsilon\int_U\omega$$

עבור יריעה M, נקח $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ אטלס סופי מקומי- כך ש: $\phi_\alpha: U_\alpha\longrightarrow\mathbb{R}^n$ שומרות אוריינטציה. נקח חלוקת יחידה h_α

$$\int_M\omega := \sum_\alpha \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (\phi_\alpha^{-1})^* h_\alpha\omega$$

<u>טענה:</u>

ההגדרה לא תלויה בבחירות שנעשו (אטלס + חלוקת יחידה).

<u>הוכחה:</u>

$\{(V_\beta,\psi_\beta)\}$ ו- g_β חלוקת יחידה.

$$I = \sum_\alpha\int_{\phi_\alpha(U_\alpha)}(\phi_\alpha^{-1})^*h_\alpha\omega = \sum_\alpha\int_{\phi_\alpha(U_\alpha)}\underbrace{\sum_\beta(\phi_\alpha^{-1})^*g_\beta}_{(\phi_\alpha^{-1})^*(1)}(\phi_\alpha^{-1})^*(h_\alpha\omega)=$$

תכונות של משיכה לאחור

$$= \sum_{\alpha,\beta}\int_{\underbrace{\phi_\alpha(U_\alpha\cap V_\beta)}_{\omega_{\alpha\beta}}}(\phi_\alpha^{-1})^*(h_\alpha g_\beta\omega)$$

נשים לב ש: $T_{\alpha\beta}:=\phi_\alpha\circ\psi_\beta^{-1}:\psi_\beta(\omega_{\alpha\beta})\longrightarrow\phi_\alpha(\omega_{\alpha\beta})$

$$T_{\alpha\beta}^*(\phi_\alpha^{-1})^*(g_\beta h_\alpha\omega) = (\psi_\beta^{-1})^*\phi_\alpha^*(\phi_\alpha^{-1})^*(g_\beta h_\alpha\omega)$$

מהטענה הקודמת שהוכחנו

$$I = \sum_{\alpha,\beta}\int_{\psi_\beta(\omega_{\alpha\beta})}(\psi_\beta^{-1})^*(h_\alpha g_\beta\omega)$$

אם היינו עושים את אותו הפיתוח עבור (V_β,ψ_β), בשלב היינו מקבלים:

$$J = \sum_{\alpha,\beta}\int_{\psi_\beta(\omega_{\alpha\beta})}(\psi_\beta^{-1})^*(h_\alpha g_\beta\omega)$$

<u>תכונות:</u>

1) פ' לינארית: $\int : \Omega_c^n(M) \longrightarrow \mathbb{R}$

2) $$\int_{(M,or)} \omega = -\int_{(M,-or)} \omega$$

3) $f: M^n \longrightarrow N^n$ דיפאו $\omega \in \Omega_c^n(N)$

$$\int_M f^*\omega = \varepsilon \int_N \omega$$

משפט STOKES:

M^n אוריינטבילית (נניח $\partial M \neq 0$). אנו יודעים ש- ∂M^n יריעה אוריינטבילית ממימד $n-1$. אם נקח $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ נקבל:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

(אם $\partial M = \phi$ אז $\int_\phi \omega = 0$)

<u>מה קורה ב- $\mathbb{R}^n$:</u>

צריך להסביר למה $\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0$