9/1/2017 הרצאה 21:

15 - 25 הפקולטה - עבודת בית

תבניות דיפרנציאליות:

$\Lambda^k(M)$: k תבניות, $\Lambda^*(M)=\bigoplus_{k=0}^{n}\Lambda^k(M)$

קואורדינטות: $\Lambda^k(M)\ni\omega=\sum f_{i_1,\dots,i_k}(x_1,\dots,x_n)\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}=$

$$=\sum_I f_I\,\omega^I$$

אלגברה חיצונית:

$$\left.\begin{aligned}\omega&=\sum f_I\,dx_I\\ \eta&=\sum g_J\,dx_J\end{aligned}\right\}\ \omega\wedge\eta=\sum_{I,J} f_I\cdot g_J\,dx_I\wedge dx_J$$

$$(\omega\wedge\eta)_p=(\omega_p\wedge\eta_p)$$

- $\wedge$ אסוציאטיבית

- $\wedge$ סופר קומוטטיבית $\qquad \omega\wedge\eta=(-1)^{|\omega||\eta|}\eta\wedge\omega$

$$\omega\wedge\eta(X_1,\dots,X_{k+l})=\frac{1}{(k+l)!}\sum \operatorname{sgn}(\sigma)\,\omega(X_{\sigma(1)}\dots X_{\sigma(k)})\,\eta(X_{\sigma(k+1)}\dots X_{\sigma(k+l)})$$

שדות וקטוריים

($\Lambda^*(M)$ - אלגברה מדורגת)

נגזרת חיצונית:

$$d:\Lambda^k(M)\longrightarrow\Lambda^{k+1}(M)$$

$$\omega=f(x_1,\dots,x_n)\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega:=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_n)\,dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

דוגמה:

$$\omega=a_1dx_1+\dots+a_ndx_n$$

$$d\omega=da_1\wedge dx_1+\dots+da_n\wedge dx_n$$

$$=\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial a_1}{\partial x_n}dx_n\right)\wedge dx_1+\dots+$$

$$+\left(\frac{\partial a_n}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial a_n}{\partial x_n}dx_n\right)\wedge dx_n =$$

$$= \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial a_n}{\partial x_{n-1}} - \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_1}\right) dx_{n-1} \wedge dx_n$$

6) (בפרט $f \in C^\infty(M)$ $\quad df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$)

<u>טענה:</u>

1) $d^2 = 0$

כי:
$$d(d\omega) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_j} dx_l \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

2) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge d\beta$

$$d(\alpha\wedge\beta) = d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J = (f\,dg + g\,df) \wedge dx^I \wedge dx^J =$$
$$= f\,dg \wedge dx^I \wedge dx^J + g\,df \wedge dx^I \wedge dx^J =$$
$$= (-1)^k f\,dx^I \wedge dg \wedge dx^J + df \wedge dx^J \wedge g\,dx^I$$

כאן לקחתי
$\alpha = f_I dx_I$
$\beta = g_J dx_J$

<u>תרגיל:</u>

d נקבע ביחידות ע"י 0,1,2.

זה אומר שמשמיטים את $\hat{X}_i$

<u>תרגיל:</u>

$\omega \in \Lambda^k(M)$
$$d\omega(X_0, X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i\, \omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k) + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots X_k)$$

<u>רמז:</u>

להתחיל עם 2 שדות וקטורים: $\omega \in \Lambda^1(M)$
$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

<u>מכפלת "פנים":</u>

$$i_X : \Lambda^{k+1}(M) \longrightarrow \Lambda^k(M)$$
$$(i_X\omega)(X_1, \dots, X_k) = \omega(X, X_1, \dots, X_k)$$

<u>תרגיל (חשוב!?)</u>

$$i_X(\omega \wedge \eta) = i_X\omega \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge i_X \eta$$

Scanned by CamScanner

__תזכורת:__

$F: M \to N$ חלקה. $\quad F^*: \Lambda^*(N) \longrightarrow \Lambda^*(M)$

☆ אם F דיפאומורפיזם אז F^* איזומורפיזם עיגורי (להשתמש בכך ש- $(f\circ g)^* = g^*\circ f^*$))

- $F^*(\omega\wedge\eta) = F^*(\omega)\wedge F^*(\eta)$

(☆☆) - $g\in C^\infty(N)$ $\quad F^*g = g\circ F$

$$f^*\omega(X_1,\dots,X_k) = \omega(f_*X_1,\dots,f_*X_k)$$

- $\varphi\in C^\infty(N)$, $\alpha\in\Lambda^1(N)$ $\quad f^*(\varphi\alpha) = f^*(\varphi)\, f^*(\alpha)$

__מסקנה (תרגיל)__

$$df^* = f^*d$$

בודקים לפונקציות (מההגדרה) ול- 1 תבניות (ונובע מ-(☆☆)) ודי - התכונה נובעת מכאן.

__נגזרת Lie__

$$\mathcal{L}_X: \Lambda^k(M) \longrightarrow \Lambda^k(M)$$

$$\omega\in\Lambda^k(M).\quad (\mathcal{L}_X\omega)(X_1,\dots,X_k) = X\omega(X_1,\dots,X_k) - \sum_{j=1}^{k}\omega(X_1,\dots,[X,X_j],\dots,X_k)$$

__מחר:__

$$\mathcal{L}_X\omega = \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_X^t)^*\omega - \omega}{t}$$