3/1/2017 חומר הרצאה (בדפים)

הרצאה טב:

<u>הערה על סוף שיעור שעבר:</u>

<u>מסקנה:</u>

על S^n יש שדה וקטורי (חלק) שלא מתאפס אמ"מ n אי זוגי.

<u>הוכחה:</u>

n אי זוגי $\quad S^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k} \cong \mathbb{C}^k \quad , \quad x \longrightarrow ix$

$$(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) \longmapsto (-y_1, x_1, \dots, -y_k, x_k)$$

n זוגי: $\quad F(t,x) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)\tilde{V}(x)$

הומוטופיה חלקה בין $f(x) = x$, $g(x) = -x$ וכזה לא יתכן (בגלל הדרגה)

<u>פרק י"ד: תבניות דיפרנציאליות</u>

V^n מ"ו ממימד n (מעל $\mathbb{R}$)

$\Lambda^k(V^n)$ k - תבניות $\quad \omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ פעמים}} \longrightarrow \mathbb{R}$ מולטי לינאריות + אנטי סימטריות.

$$\Lambda^0(V) \cong \mathbb{R} \qquad \Lambda^1(V) \cong V^* = \mathrm{span}\{e^1, \dots, e^n\}$$

הבסיס הדואלי ל-B $\qquad \Lambda^m(V) = 0 \quad m > n$

"בסיס" $\quad I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_k\} \quad , \quad B = \{e_1, \dots, e_n\}$ בסיס "מסודר" של V

k תבניות $\quad \leftarrow \quad e^I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$

wedge

$$e^I(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \delta_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot \delta_{i_k j_k}$$

<u>דוגמא:</u>

$\mathbb{R}^n$: $\quad (e^1 \wedge e^2)(v, \omega) = v_1\omega_2 - v_2\omega_1$

<u>תרגיל:</u>

להשתכנע שזה בסיס, וכן: $\quad \dim \Lambda^k(V^n) = \binom{n}{k}$

<u>מכפלה חיצונית</u> wedge product, Exterior product

$\eta \in \Lambda^l(V) \; , \; \omega \in \Lambda^k(V) \quad \Longrightarrow \quad \omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V)$

$$\omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

σ פרמוטציה כך ש:

$$\sigma = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l) \text{ s.t. } \begin{pmatrix} i_1 < i_2 < \dots < i_k \\ j_1 < j_2 < \dots < j_l \end{pmatrix}$$

הערה:

- $\alpha\wedge\beta$ בי לינארי, אסוציאטיבי: $\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)=(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$
- והוא סופר-קומוטטיבי: $\omega\wedge\eta=(-1)^{k\cdot l}\,\eta\wedge\omega$
- תרגיל:

$$(u_1\wedge\dots\wedge u_k)(v_1,\dots,v_k)=\det\left(u_j(v_i)\right)$$ (אינדוקציה)

$u_j\in V^*\qquad v_i\in V$

Interior product

$v\in V \qquad i_v:\Lambda^k(V)\longrightarrow\Lambda^{k-1}(V)$

$$i_v(\omega)(v_1,\dots,v_{k-1})=\omega(v,v_1,\dots,v_{k-1})$$

תרגיל:

ה-k המקורי.

$$i_v(\omega\wedge\eta)=i_v\omega\wedge\eta+(-1)^{\deg\omega}\,\omega\wedge i_v\eta$$

תרגיל: (התנהגות ביחס להעתקות לינאריות)

הגדרה: $A:V\longrightarrow W$

$A^*:\Lambda^k(W)\longrightarrow\Lambda^k(V)$

$(A^*\omega)(v_1,\dots,v_k)=\omega(Av_1,\dots,Av_k)$

1) $A^*(\omega\wedge\eta)=A^*\omega\wedge A^*\eta$

2) $i_vA^*\omega=A^*(i_{A(v)}\omega)$

חזרה ליריעות:

$$T_xM=sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$$

$$T_x^{(*)}M=sp\{dx_1,\dots,dx_n\}$$

נגדיר מבנה חלק על $\Lambda^k(M)=\Lambda^k(TM)=$

$$=\bigsqcup_{p\in M}\Lambda^k(T_pM)$$

סקוובה: (מבוטה צמבנה החלק שהסברנו על TM ו- T^*M).

$$\pi : \Lambda^k(M) \longrightarrow M$$

$$\pi(p, \omega) = p$$

$$\pi^{-1}(p) = \Lambda^k(T_pM)$$

הערה:

אם $f: M \to N$ דיפאו׳, נגדיר:

$$df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$

$$df_p^* : \Lambda^k(T_{f(p)}N) \longrightarrow \Lambda^k(T_pM)$$

$$df^* : \Lambda^k(N) \longrightarrow \Lambda^k(M)$$ חתך ועלה.

$$df^*(q, \omega) = df^*_{f^{-1}(q)}(\omega)$$ $q \in N,\ \omega \in \Lambda^k(T_qN)$

df^* הוא איזומורפיזם לינארי בכל "סיב".

אם $M = V$ ($V \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה)

$$T_pM = sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right\}$$

$$T_p^*M = sp\left\{dx_1|_p, \ldots, dx_n|_p\right\}$$

לכל $\omega \in \Lambda^k(T_pM)$ ניתן להציג (בצורה יחידה) כך:

$$\omega = \sum \omega_I \, dx^I|_p$$

$$I = (i_1, \ldots, i_k)$$

כלומר:

$$V \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \longrightarrow \Lambda^k(V)$$

<u>המשך:</u>

תהי M יריעה חלקה: $\{\varphi_\alpha : \underset{\mathbb{R}^n}{V_\alpha} \to \underset{M}{U_\alpha}\}_{\alpha\in A}$ אטלס של M.

$X_\alpha : \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \to U_\alpha$ קורדינטות מקומיות

X_α דיפאו.

מהדיון הקודם $\Longleftarrow$

$$X_\alpha^* : \Lambda^k(V_\alpha) \cong V_\alpha \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \longrightarrow \Lambda^k(U_\alpha)$$

<u>טענה:</u>

$\{\psi_\alpha = \varphi_\alpha^*\}_{\alpha\in A}$ זה אטלס עבור $\Lambda^k(M)$

<u>הוכחה</u> <u>(למה זה אטלס)</u>:

מסמנים הקורדינטות:

$x=(x_1,\dots,x_n)$ במקור

$y=(y_1,\dots,y_n)$ במטרה

$$\psi_{\alpha\beta} = \psi_\beta^{-1}\psi_\alpha$$

$$f = \varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha : V_{\alpha\beta} \longrightarrow V_{\alpha\beta}$$

$$\psi_{\alpha\beta}(X,\{\omega^I\}) = (f(x), \{\omega'_j\})$$

נרצה שהשתנה שלה תלוי ב- x וב- $\{\omega^I\}$ בצורה חלקה.

$$p = \varphi_\alpha(x)$$

$$(*) \qquad \sum_I \omega_I\, dx^I\Big|_p = \sum_J \omega'_j\, dy^I\Big|_p$$

נקבע מולטי אינדקס $J=(j_1<\dots<j_k)$. נפעיל את $(*)$ על:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial y_{j_k}}\right)$$

$$RHS:\quad \omega'_J$$

$$LHS:\quad \sum_I \omega_I\, dx^I\Big|_p\left(\frac{\partial}{\partial y_{j_1}}\Big|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial y_{j_k}}\Big|_p\right)$$

נזכר ש:

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$$

מציבים ומקבלים:

$$\omega'_J = \sum_I{}' \sum_{Q=(q_1,\dots,q_k)} \omega_I\, \frac{\partial x_{q_1}}{\partial y_{j_1}}\cdots\frac{\partial x_{q_k}}{\partial y_{j_k}}\, dx^I\left(\frac{\partial}{\partial x_{q_1}}\Big|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x_{q_k}}\Big|_p\right)$$

וזה חלק (בהשתנה)

<u>הגדרה:</u>

k תבניות על יריעה M כה <u>חתך חלק</u> של $\pi:\Lambda^k(M)\to M$

חלקה $\leftarrow$ $\omega: M\to\Lambda^k(M)$ כך ש- $\pi\circ\omega = Id$

<u>למה (תרגיל):</u>

הטענות הבאות שקולות:

1) ω חלקה

2) לכל מפות מקומיות $\omega|_u = \sum_I \omega_I(x)\,dx^I$

הפונקציות הנ"ל חלקות

<u>טענה:</u>

אם $\omega_1,\omega_2\in\Lambda^k(M)$ $f_1,f_2: M\to\mathbb{R}$ חלקות, אזי:

1) $f_1\omega_1+f_2\omega_2\in\Lambda^k(M)$

2) $\omega,\eta\in\Lambda^*(M) \Rightarrow \omega\wedge\eta\in\Lambda^*(M)$

3) $F: M\to N$ חלקה

$F^*:\Lambda^*(N)\to\Lambda^*(M)$ לינארית בסיבים

בפרט: $F^*(g)=g\circ F\ ,\ g\in\Lambda^0(N)$

4) $M\xrightarrow{F}N\xrightarrow{G}P$; $(G\circ F)^* = F^*\circ G^*$

5) $f: M\to\mathbb{R}$ חלקה $f^*(dt)=df$

6) $F: M\to N$ חלקה $F^*(\omega\wedge\eta)=F^*\omega\wedge F^*\eta$

7) $F=(F_1,\dots,F_m): M\to\mathbb{R}^m$ חלקה

$$F^*\Big(\sum_{I=\{i_1<\dots<i_k\}}\omega_I(y)\,dy^I\Big)=\sum_I(\omega_I\circ F)\,dF_{i_1}\wedge\dots\wedge dF_{i_k}$$

<u>מושג חשוב</u>: <u>נגזרת חיצונית</u>

$$d:\Lambda^k(M)\longrightarrow\Lambda^{k+1}(M)$$

<u>טענה:</u>

קיימת ויחידה העתקה לינארית (בסיבים) כך ש:

1) $f\in C^\infty(M)\Rightarrow df=df$

ה- d הנ"ל   הדיפרנציאל

2) $\omega\in\Lambda^k(M),\eta\in\Lambda^l(M)$ $d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^{|\omega|}\omega\wedge d\eta$ $|\omega| = \deg\omega$

3) $d^2=0$ כלומר: $\forall\omega\ \ d(d\omega)=0$

הערה:

נשים לב ש: $\Lambda^0(M) \cong C^\infty(M)$

הוכחה:

אם $\omega = \sum_I' \omega_I dx^I$, $M = V \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה

$d\omega = \sum' d\omega_I(x) \wedge dx^I$

בקורדינטות: $\varphi : U \longrightarrow V$: $(x_1, \dots, x_n)$

$U \subset M$, $V \subset \mathbb{R}^n$

$dx_i \in \Lambda^1(U)$ $\quad$ $(d(dx_i) = 0) \leftarrow$ א-(3)

$f = \sum' f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

$df = \sum'_{i_0, \dots, i_k} \partial_{i_0} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_0} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

נגזרת לפי המשתנה החדש
של ה-f הישן