הרצאה 2 : 1/11/2016

2 משפטים ללא הוכחה:

משפט (מיון של יריעות חד-מימדיות):

כל היריעות החד מימדיות שוש- S^1, $\mathbb{R}^1$ (יריעות עם שפה $[0,1]$, $[0,1)$)

משפט (מיון של יריעות דו-מימדיות):

אוריינטביליות . . . . S^2 , $\underbrace{S^1 \times S^1}_{T^2}$, $T^2 \# T^2$, $T^2 \# T^2 \# \ldots$. (מניחים גם קומפקטיות)

אינווריאנטים

השאלה? - הומולוגיה - לוקחת מרחב טופולוגי ומגדיר עבורו מרחב וקטורי $H_k(X)$

ל-2 יריעות הומאומורפיות ההומולוגיה הוא אינווריאנט שלהם.

? - הומוטופיה - $\pi_k(X)$

? - הומאומורפיזם

- במקרה חלק - דיפאומורפיזם.

מלה: פונקציה חלקה?

ננסה להגדיר יריעה חלקה,

ניסיון נאיבי: X חלקה אם ϕ חלקה (מה המשמעות במרחב טופולוגי??)

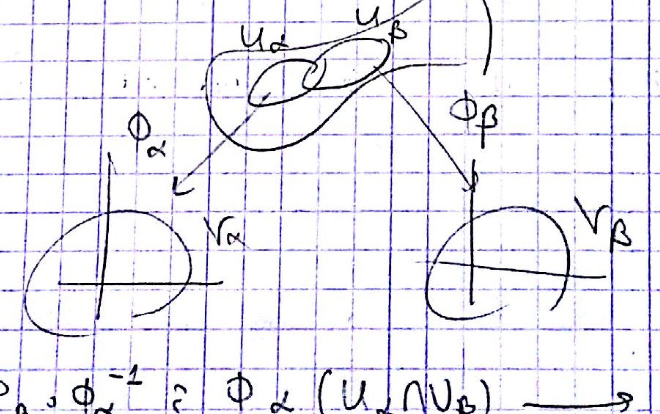
ניסיון הגדרת פחות נאיבי: $f: X \to \mathbb{R}$ חלקה? אם ההרכבה $f \circ \phi^{-1}$ חלקה,

בעייתיות במקרה הזה - יש הרבה בפרט.

הגדרה:

X מ"ט ממימד n. נאמר ששתי מפות $(U_\alpha, V_\alpha, \phi_\alpha)$; $(U_\beta, V_\beta, \phi_\beta)$

הן מתואמות (קומפטביליות) אם:



מזל: הומיאומורפיזם

דיפאומורפיזם $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$

הסכם:

(חלק זה C_∞)

הערה: אם הם לא נחתכים אזי הן מתואמות לפי הגדרה

הגדרה:

אוסף של מפות מתואמות המכסה את היריעה נקרא **אטלס**.

נסיון ראשון למבני חלקות:

יריעה חלקה זאת יריעה + אטלס (כלומר - יריעה נקראת חלקה אם קיים אטלס כזה).

"בעיה": יתכן קיום של הרבה אטלסים.

פתרון: 1) להגדיר מחלקת שקילות בין אטלסים. } שקולים.

2) "אטלס מקסימלי"

הגדרה:

2 אטלסים נקראים **שקולים** אם האיחוד שלהם הוא אטלס.

(תרגיל: להוכיח שזה יחס שקילות) תרגיל: שקולים אם"ם Id הוא דיפאומורפיזם

מה הכוונה ?!

הגדרה טובה:

יריעה חלקה זאת יריעה טופולוגית המצוידת במחלקת שקילות של אטלסים.

$(M,[A])$

יריעה

מחלקת שקילות של אטלסים

הגדרה שקולה:

טענה:

בהינתן אטלס A קיים ויחיד אטלס מקסימלי B המכיל את A

הוכחה:

$\bar{A} = \{ (U,\phi) \mid$ מפות מתואמות עם כל המפות ב- A $\}$

הוא יחיד ומקסימלי - נובע מזה שזה יחס שקילות.

הגדרה שקולה:

$(M,\bar{A})$ יריעה חלקה (יריעה שמצוידת עם אטלס מקסימלי).

דוגמה:

$(\mathbb{R},\mathbb{R},\phi_\alpha)$ $\phi_\alpha(x)=x$

$(\mathbb{R},\mathbb{R},\phi_\beta)$ $\phi_\beta(x)=x^3$

} הם לא שקולים כי ההעתקות לא מתואמות

א. פונקציות גזירות הוא ביחס לאטלס - מגדירים את הפונקציות הגזירות כאלה ש- $f\circ\varphi^{-1}$ מ- $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ גזיר

ולכן, ביחס לאטלסים שונים, קבוצת הפונקציות הגזירות שונה;

$$\bar{A} = \{ (U,\varphi) \mid \text{מתואמות עם כל המפות ב-}A \}$$

נשתכנע שזה אטלס:

$(U,\varphi), (V,\psi)$ נתונות.

ניקח מפה ב- A (W,ω) המתואמת עם שתיהן

ונרכיב: $\psi\circ\varphi^{-1} = \underbrace{\psi\circ\omega^{-1}}_{\text{דיפאומורפיזם}}\circ\underbrace{\omega\circ\varphi^{-1}}_{\text{דיפאומורפיזם}}$

הרכבה של 2 דיפאומורפיזמים ב- $\mathbb{R}^n$ הוא דיפאומורפיזם.

רוצים להוכיח ש- $\bar{A}$ <u>מקסימלי</u>: כל מפה שמתואמת עם כל המפות ב- $\bar{A}$ גם מתואמת עם כל המפות ב- A.

<u>יחידות:</u> נניח שהיה אחד אחר - B, הוא אטלס, ולכן כל המפות שלו מתואמות, בפרט מתואמות עם כל המפות ב- A.

<u>דוגמאות:</u>

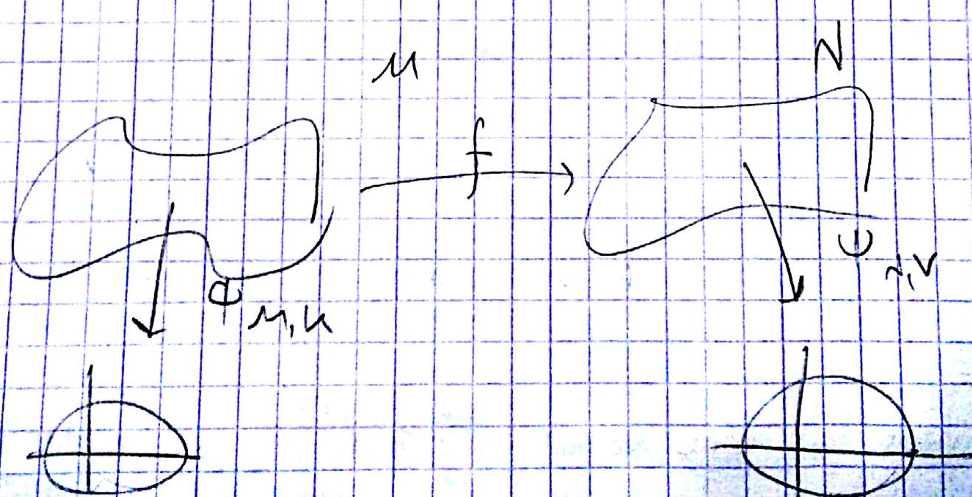
- $\mathbb{R}$ עם: $\left.\begin{array}{l}(\mathbb{R},\mathbb{R},\varphi_\alpha(x)=x)\\(\mathbb{R},\mathbb{R},\varphi_\beta(x)=x^3)\end{array}\right\}$ 2 אטלסים, <u>לא מתואמים</u>;

כלומר: $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$ לא דיפאומורפיזם,

<u>תרגיל:</u> למצוא פ' חלקה באטלס הראשון ולא חלקה בשני.

<u>תרגיל:</u> $f(x)=x^3$ נותנת דיפאומורפיזם בין 2 המבנים (דיפאומורפיזם במובן של ההרכבה עם האטלס המתאים).

<u>"המחשה"</u>



הערה:

כל הדוגמאות שראינו קודם הן למעשה יריעות חלקות.

למשל: $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, "אטלס":

$U^+ = \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{(0,\dots,-1)\}$

$U^- = S^{n+1}\setminus\{(0,\dots,+1)\}$

$$\varphi_i^{\pm}(x_1,\dots,x_{n+1}) = \frac{1}{1\pm x_{n+1}}(x_1,\dots,x_n)$$

באמת אטלס חלק כי ה-φ השונים מתואמים.

$$\varphi_+\circ\varphi_-^{-1}(y_1,\dots,y_n) = \frac{(y_1,\dots,y_n)}{y_1^2+\dots+y_n^2}$$

כמו הספירה החלקה ב-$\mathbb{R}^{n+1}$.

הגדרה: $(M,A),(N,B)$ יריעות חלקות.

בהינתן העתקה רציפה $f: M\to N$. f חלקה אם לכל מפה $(U_\alpha, V_\alpha, \varphi_\alpha)$ ב-(M,A) ולכל מפה $(U_\beta, V_\beta, \varphi_\beta)$ ב-(N,B), העתקות המעבר:

$$\varphi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha\cap f^{-1}(U_\beta)) \longrightarrow \varphi_\beta(f(U_\alpha)\cap U_\beta)$$

הן חלקות (מניחים $U_\alpha\cap f^{-1}(U_\beta)\neq 0$)

הערות:

1) איך אנחנו חושבים על גזירות של $f: M\to N$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})$$

2) תרגיל (דף תרגול 1). $f: M\to N$ חלקה אם f רציפה ולכל נקודה $x\in M$ קיימות מפות (U,φ) ו-(V,ψ) סביב $x\in M$ ו-$f(x)\in N$ כך שההרכבה $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}: \varphi(U)\to\psi(V)$ חלקה בנקודה.

(נניח ש: $f(U)\subseteq V$)

3) אפשר לדבר / לשנות את ההגדרה ולקבל יריעות C_k חלקות.

(יריעות הומיאומורפיות)

?

?