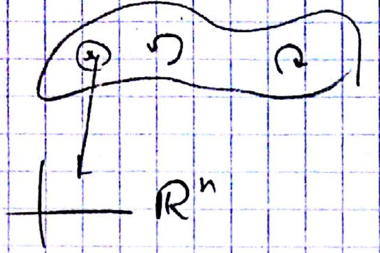
2/1/2017

הרצאה 19:



בפעם שעברה: אוריינטציה

- תבניות נפח
- "העתקות מסבר"

ראינו:

M + אוריינטציה, השפה ∂M "יורשת אוריינטציה מ-M"

בפרט:

$$\partial(M\times I) = M\times\{0\} \cup -M\times\{1\}$$

לכל יריעה 2 אוריינטציות ולכן - פשוט מסמן את האוריינטציה ההפוכה.

הגדרה:

$f: M\to N$, M קומפקטית, N קשיר $\dim M=\dim N$

y ערך רגולרי, M,N + אוריינטציה.

$$\deg(f,y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} \varepsilon(x)$$

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{שומרת אוריינטציה ב-}x\ f \\ -1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נרצה להוכיח ש- $\deg(f,y)$ לא תלוי ב-y.

הוכחה:

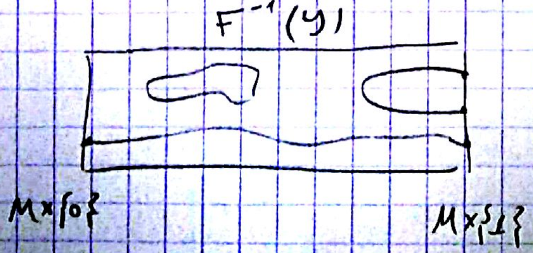
למה I:

X קומפקטי + אוריינטציה, $\partial X = M$ $\quad f: M\to N$

$F: X\to N$ אזי $\deg(f,y)=0$ לכל ערך רגולרי y של f.

מקרה א':

y ערך רגולרי גם של F



SARD + RVT - יריעה ממימד 1 - "יודעים" מה היא

בגלל שבקודות האוריינטציה הפוכה מתקבלים $\deg(f, y) = 0$.

<u>למה II</u>:

F הומוטופיה בין f ו- g ונניח ש- y ערך רגולרי משותף (*) -

(אפשר להבטיח לפי למה ג - SARD)

אזי: $\deg(f, y) = \deg(g, y)$

<u>הסבר</u>:

$$0 \overset{\text{למה I}}{=} \deg(F|_{\partial(M\times I)}, y) \underset{\uparrow}{=} \deg(f, y) - \deg(g, y)$$

(**) - צריך להשתכנע (נזכר ש- $\partial(M\times I) = M\times\{1\} \cup -M\times\{0\}$)

<u>למה III</u>:

ניתן להגדיר כל נקודה (y) לכל נקודה וה- deg נשמר.

<u>הערה</u>:

בגלל שמגדירים יריעה + אוריינטציה מניחים שכל הפונקציות שומרות אוריינטציה. $f: (M, \omega_M) \longrightarrow (N, \omega_N)$ שומרת אוריינטציה אם ה- pullback של (N, ω_N) נותן את (M, ω_M).

לשים לב שזה לא אותו דבר כמו שמירת אוריינטציה בנק' מסוימת.

<u>מסקנות</u>: (תרגיל)

1) f דיפאו $\Longleftarrow$ $\deg(f) = \pm 1$

2) f הכמות $\Longleftarrow$ $\deg(f) = +1$

3) $r: S^n \longrightarrow S^n$ שיקוף ביחס למישור: $\deg(r, 0) = -1$

4) $\phi: S^n \longrightarrow S^n$ אנטיפודית $x \longmapsto -x$. $\deg(\phi) = (-1)^{n+1}$

$\leftarrow$ דרגה של הרכבה היא הרכבת הדרגות.

5) מה הדרגה של $z \longmapsto z^n$, $S^1 \longrightarrow S^1$

Scanned by CamScanner

למה:

חלקות $f,g: S^n \to S^n$ (S^n עם האוריינטציה הסטנדרטית שהיא יורשת מ- $\mathbb{R}^{n+1}$),

ו- $\forall x \in S^n.\ f(x) \neq g(x)$

אזי: f הומוטופית ל- $-g$

הוכחה:

$$F_t(x) = \frac{t\,g(x) - (1-t)\,f(x)}{\| t\,g(x) - (1-t)\,f(x) \|}$$

טענה:

$f: S^n \to S^n$ חלקה, n זוגי, אזי יש $x \in S^n$ עבורה x ו- $f(x)$ "תלויים לינארית" - (ב- S^n זה רק "$f(x)=x$ או $-f(x)=x$")

הוכחה:

אחרת, $\pm f(x) \neq x$. נפעיל את הלמה הקודמת פעמיים.

ונקבל: ($\phi: x \longmapsto -x$):

$$\phi = \phi \circ Id \sim f \sim \phi \circ \phi = Id$$

בסתירה ל- 2 + 4 מקודם.

מסקנה:

אי אפשר לסרק קיפוד:

להשתכנע ← על S^n יש שדה וקטורי חלק $\neq 0 \iff n$ אי זוגי

אם n אי זוגי - ראינו כבר $x \mapsto ix$.

(נזהה כאן את S^n עם TS^n ואת TS^n המרחב המשיק. שום $f: S^n \to TS^n \cong S^n$ שדה וקטורי חלק אבל יש נקודה שבה - f שולחת את x לעצמו, ובנקודה זו המרחב המשיק מתאפס)

משפט Hopf

M קומפקטית, אוריינטבילית, ללא שפה, ממימד n:

$f,g: M \longrightarrow S^n$ הומוטופיות $\iff$ $\deg(f)=\deg(g)$

שאלה נחמדה למבחן בית: (הראו את המקרה $n=1$)

פרק יב - תבניות דיפרנציאליות

תרגילים באלגברה לינארית:

- $\Lambda^k(V^n)$ מ"ו, צריך למצוא לו בסיס (אפשר להתחיל ב- 1 ולהמשיך באינדוקציה)