27/12/2016

הרצאה 18:

משפט BU:

אם $f: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ אי זוגית $(f(-x) = -f(x))$ חלקה אזי:

$$\omega_2(f,0) = 1$$

מסקנה א':

f כולה "פוגעת" כל ישר העובר דרך הראשית לפחות פעם אחת.

הוכחה:

אם לא $f(S^n) \cap \mathbb{R}y = \phi$. בסימונים הקודמים $|f_1^{-1}(\mathbb{R}y)| = 0$

ולכן סתירה למשפט הקודם. (תרגיל)

מסקנה ב':

$f_1,\dots,f_n : S^n \to \mathbb{R}$ חלקות אי זוגיות $\Leftarrow$ $f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0 \quad \exists x \in S^n$

הוכחה: נניח שלא קיימת נקודה כזו.

נגדיר $F(x) = (f_1(x),\dots,f_n(x),0)$. $F: S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ (אם לא

קיימת נקודה שמאפסת את כל ה- f_i).

והיא לא חותכת את $(0,0,\dots,0,\mathbb{R})$ סתירה למסקנה א'.

מסקנה ג':

$g: S^n \to \mathbb{R}^n$ חלקה $\exists x: g(x) = g(-x)$

הוכחה:

נגדיר: $f_k(x) = g_k(x) - g_k(-x)$ - $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$

ונשתמש במסקנה ב'.

מסקנה: משפט כריך הנקניק

$\mu_1,\dots,\mu_n$ מידות בעלות סופיות על $\mathbb{R}^n$ (מתאפסות על על-מישורים)

נסמן $H(v)$ "חצי מרחב" (כלומר v חוצה את המרחב ל-2 ולוקחים

חצי שלוןן/ תחתון של המרחב).

$$\Longleftarrow \quad \exists H(v) \quad \mu_k(H(v)) = \frac{1}{2}\mu_k(\mathbb{R}^n)$$

"הוכחה"

נגדיר: $f_k(v) := \mu_k(H(v))$ ונרצה למצוא v כך ש: $f(v) = f(-v)$

פרק יא: אוריינטציה:

נתחיל עם $V = \mathbb{R}^n$

הגדרה:

שני בסיסים מסודרים נקראים שקולים אם למטריצת המעבר דטרמיננטה חיובית.

הגדרה:

אוריינטציה - מחלקת שקילות של בסיסים כנ"ל.

הגדרה:

$\Lambda^k(V^n)$ מ"ו של אוסף ה- k תבניות על V.

מ"ו ממימד n

k תבניות לפי הגדרה: $\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k} \longrightarrow \mathbb{R}$

מולטילינאריות ואנטי סימטריות

$$\omega(\dots u_i, \dots v_j, \dots) = -\omega(\dots v_j, \dots u_i, \dots)$$

תרגילים:

1) $\dim \Lambda^n(V^n) = 1$

2) $\forall \omega \in \Lambda^n(V), \forall A \in GL_n(V). \quad \omega(Av_1, \dots, Av_n) = \det(A)\, \omega(v_1, \dots, v_n)$

3) $\dim \Lambda^k(V^n) = \binom{n}{k}$

"רמז": למצוא בסיס.

דוגמה:

$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$

$(z_k = x_k + i y_k)$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i} = \langle z, w \rangle_{\mathbb{C}} = \langle z, w \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} + i\, \underbrace{\omega(z,w)}_{\text{2-תבנית}}$$

מהי אומגה לגבי ω!

התבנית הסימפלקטית הסטנדרטית

הגדרה:

$\omega \in \Lambda^n(V^*)$ נקראת <u>תבנית נפח</u> אם $\omega \neq 0$. (כשאנו חושבים על ω כמספר)

נסדר יחס שקילות על $\frac{\omega_1}{\omega_2} > 0$ <u>בין תבניות נפח</u>.

הגדרה 2:

<u>אוריינטציה</u> על V היא מחלקת שקילות של תבניות נפח.

תרגיל:

להשתכנע שההגדרה שקולה.

הגדרה:

ω מכבדת את B, ($B = \{e_1, \dots, e_n\}$ בסיס מסודר) אם $\omega(e_1, \dots, e_n) > 0$.

<u>אטכשיון M^n יריעה חלקה</u>

n-תבנית על M^n: כאות הצמדה חלקה:

$$x \longmapsto \omega_x \in \Lambda^n(T_x M)$$

כלומר, לכל מפה: $(x_1, \dots, x_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\omega_x = f(x) \det$, $T_x M \equiv \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ חלקה.

במבחן בטוח יהיה שאלה שבניין שהוכיח שנשרים לא ראוי במפוי

הגדרה:

יריעה M^n נקראת <u>אוריינטבילית</u> אם יש לה תבנית נפח.

אוריינטציה - בחירה של מחלקת שקילות של תבניות נפח.

דוגמא:

$S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, n_x נורמל חיצוני $\det \equiv \omega_0$

$$\Omega := i_{n_x} \omega_0$$

$$\Omega(\xi_1, \dots, \xi_n) = \omega_0(n_x, \xi_1, \dots, \xi_n)$$

תרגיל: כאות תבנית נפח.

הגדרה שקולה:

M אוריינטבילית אם יש בחירה חלקה של אוריינטציה של T_xM (לכל נקודה) ויש מפה באטלס כך ש:

$$d\varphi_x : T_xM \longrightarrow T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^n$$

מתשרת בין האוריינטציה של T_xM לאוריינטציה הסטנדרטית של $\mathbb{R}^n$

הגדרה:

(M, A) אוריינטבילית, אם העתקות המעבר שומרות אוריינטציה.

הערה:

n- תבניות אפשר "למשוך אחורה" (pull back)

$$f: M \longrightarrow N \quad \Longrightarrow \quad f^*: \Lambda^n(N) \longrightarrow \Lambda^n(M)$$

$$(f^*\omega)(\xi_1,\dots,\xi_n) = \omega_{f(x)}(df_x\xi_1,\dots,df_x\xi_n)$$

סימונים: $\Lambda^n(TM)$, $\Lambda^n(M)$ אבל מכוונים להבנה

הערה (תרגיל):

בשביל שמשיכה לאחור של תבנית נפח תשאר תבנית נפח צריך ש- f תהיה דיפאו מקומי (למעשה מה אומ"מ)

תרגיל:

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$$

1) $(f\circ g)^*\omega = g^* f^*\omega$

2) $\phi \in C^\infty(N)$; $\omega\in\Lambda^n(N)$ אז: [צריך להבין מה המשיכה לאחור של פ']

$$f^*(\phi\omega) = f^*(\phi)\, f^*(\omega)$$

הגדרה:

$f:(M,\omega_M)\to(N,\omega_N)$. f שומרת אוריינטציה אם:

$$f^*\omega_N \sim \omega_M$$

תרגיל:

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ + אוריינטציה סטנדרטית. שומרת אוריינטציה אמ"מ

$$\det d_xf > 0$$

__משפט:__

אם M יריעה עם שפה לא ריקה - ו- M אוריינטבילית. אזי ∂M אוריינטבילית

__הוכחה:__ (דרך מטריקה רימנית - ללא חיובים)

__משפט:__

על כל יריעה יש מטריקה רימנית.

(מטריקה רימנית, זה חתך (section) חלק של $TM \otimes TM$

סימטרי + מוגדר חיובי.)

(לבות בחירה חלקה של מכפלה פנימית בכל מרחב משיק.)

__סימונים:__

$$g = \sum g_{ij}(x)\, dx_i \otimes dx_j$$

פ' חלקות

ב- $\mathbb{R}^n$

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$$

__הוכחה:__

נקח כיסוי + חלוקת יחידה

$$g = \sum \lambda_i g_i$$

__סקיצת ההוכחה (של הטענה המרכזית):__

$M \subset M'$ (כמובן בהגדרה של יריעה עם שפה)

$M = \{f \le 0\}$, $\partial M = \{f = 0\}$, $f: M' \to \mathbb{R}$ 0 ערך רגולרי

__נעביר נורמל:__

נקח $df_x : T_x M \to \mathbb{R}$. $\exists \nabla_x f \in T_x M$ s.t.

$$df_x(\eta) = g(\nabla_x f, \eta)$$

נשים לב ש:

$$df_x(\nabla_x f) = g(\nabla_x f, \nabla_x f) > 0$$

נגדיר:

$$n_x = \frac{\nabla_x f}{\|\nabla_x f\|_g}$$

(*) נכון: $T_x \partial M = \ker df_x$ (כך היה תרגיל) ולכן:

$$\nabla_x f \perp T_x \partial M$$

+

$$d_x f(n_x) > 0$$

נגדיר:

$$\Omega = i_{n_x} \omega_M$$

צריך להשתכנע שזה מה שרוצים

מסקנה: (תרגיל)

$$\partial(M\times[0,1]) = M\times\{0\} \cup (-M)\times\{1\}$$

אם יש 2 יריעות עם אוריינטציה אז גם על המכפלה ביניהם יש אוריינטציה.

הגדרה:

$f: M\to N$ חלקה, M,N אוריינטביליות. M קומפקטית, N קשירה, $\dim M = \dim N$ y ערך רגולרי של f.

$$\deg(f,y) := \sum_{x\in f^{-1}(y)} \varepsilon(x)$$

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{שומרת אוריינטציה } f \\ -1 & \text{אחרת} \end{cases}$$