26/12/2016

הרצאה 17:

בפעם שעברה:

$f: M \to N$, M קומפקטית (סגורה - בלי שפה). N - קשירה.

ו- $\dim M = \dim N$, הגדרנו $\deg_2(f)$

ועבור $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $y \notin f(M)$

$v(x) := \frac{f(x)-y}{\|f(x)-y\|}$, $\omega_2(f,y) = \deg_2(v)$

טענה: (משפט שעבר)

M קומפקטית + $\partial M \neq \emptyset$, $f: \partial M \to \mathbb{R}^n$

$F: M \to \mathbb{R}^n$

$F|_{\partial M} = f$

עבור $y \notin f(\partial M)$ ערך רגולרי של F

$\Rightarrow \omega_2(f,y) = |F^{-1}(y)| \pmod 2$

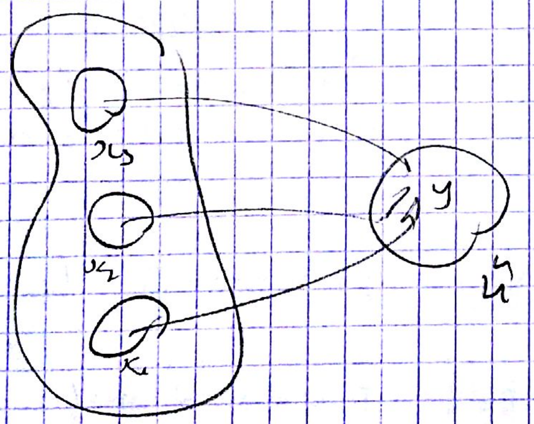
תזכורת:

מקרה א': $y \notin F(M)$

SARD + RVT גרסה עם שפה + מיון של יריעות 1- מימדיות

$\Rightarrow |F^{-1}(y)| = \omega_2(f,y) = \deg_2(v) = 0$

מקרה ב':



משפט ערימת התקליטים:

$\overline{B_\varepsilon(y)} \subset \hat{U}$

$B_j = F^{-1}(\overline{B_\varepsilon(y)}) \cap U_j$

$\tilde{M} = M \setminus \bigcup \mathrm{int}(B_j)$

$\tilde{F} = F|_{\tilde{M}}$ $\hat{V} = V|_{\tilde{M}}$ $\tilde{V} = V|_{\partial\tilde{M}}$

מקרה ב1:

$y \notin F(\tilde{M})$ הגענו למקרה א'. ← אין באמת מקרה כזה כי זרקנו את כל המקורות.

מקרה ב2:

$\hat{V}^{-1}(z) = V^{-1}(z) \cup V_1^{-1}(z) \cup \dots \cup V_n^{-1}(z)$

$$0 = \deg_2(\tilde{v}) = \deg_2(v) + \sum_{j=1}^{N} \deg_2(v_j)$$

$$\Longleftarrow \quad \deg_2(v) = N = f^{-1}(y) \pmod 2$$

הערה:

טענה (בלי הוכחה):

M קומפקטי, קשור, חלק מקו מימד 1 ב- $\mathbb{R}^n$

$\Longleftarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus M = A_0 \cup A_1$

יחסור חלקות קשירות זרות

A_0 חסומה. + $\partial A_0 = \partial A_1 = M$

משפט: **Borsuk - Ulam:**

BU - I:

$\boxed{f(-x) = -f(x)}$

$f: S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ חלקה אי זוגית, אזי

$\omega_2(f, 0) = 1$

שקול (תרגיל) $\Updownarrow$

BU - II:

$\varphi: S^n \to S^n$ חלקה ואי זוגית, $\deg_2(\varphi) = 1$

מסקנות:

1) $f_1, \dots, f_n : S^n \to \mathbb{R}$ אי זוגיות חלקות,

$\exists\, x \in S^n \quad f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0$

2) $g: S^n \to \mathbb{R}^n$ חלקה $\Longrightarrow$ $\exists x \quad g(x) = g(-x)$

3) קורולרי $f: S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ חלקה ואי זוגית $\Longrightarrow$ f "חותכת" כל ישר דרך הראשית לפחות פעם אחת.

4) "Ham - Sandwich Thm" משפט: **טוסט - חסה - עגבניה**

$\mu_1, \dots, \mu_n$ מידות בורל סופיות על $\mathbb{R}^n$ (מתאפסות על על-מישורים)

חצי על מישור

$\exists\ H(v)$ s.t. $\mu_k(H(v)) = \frac{1}{2}\mu_k(\mathbb{R}^n)$

הוכחה של BU-I :

אינדוקציה:

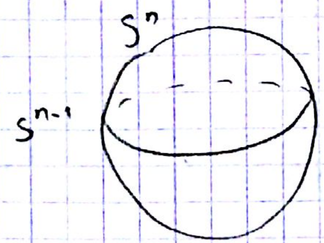
$n=1$ (תרגול)

נניח שהטענה נכונה עבור $n-1$ $(n\geq 2)$

נסמן:

$$S^{n-1} \equiv i(S^{n-1}) = \{(x,0)\in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \mid \|x\|=1\} \qquad (S^{n-1}\subseteq S^n)$$

$i : S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ הכלה



$$g = f\circ i = f|_{i(S^{n-1})}$$

$$\tilde{g} = \frac{g}{\|g\|} : S^{n-1} \longrightarrow S^n$$

$$\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|} : S^n \longrightarrow S^n$$

(*) ממשפט SARD יש ערך רגולרי משותף $y\in S^n$ ל-$\tilde{f}$ ול-$\tilde{g}$

(*) משיקולי מימד: $y\notin g(S^{n-1})$ (*) ($g(S^{n-1})$ לא חותך את $\mathbb{R}y$)

(*) y ערך רגולרי של $\tilde{f}$ ולכן מתקיים:

$$|\tilde{f}^{-1}(y)| \pmod 2 \overset{def}{=} \deg_2(\tilde{f}) = \omega_2(f,0) \pmod 2$$

(*) משיקולי סימטריה: $|\tilde{f}^{-1}(y)| = \frac{1}{2}|f^{-1}(\mathbb{R}y)|$ (כי f אי זוגית)

(*) נסמן את חצי הספירה העליונה -

$$S_n^+ = \{x\in S^n \mid x_{n+1}\geq 0\}$$

ונסמן: $f_+ := f|_{S_n^+}$

(*) ולכן: $(*) \Rightarrow \frac{1}{2}|f^{-1}(\mathbb{R}y)| = |f_+^{-1}(\mathbb{R}y)|$

ובכן: $(**)$: $\omega_2(f,0) = f_+^{-1}(\mathbb{R}y) \pmod 2$

(*) S_n^+ הנה יריעה עם שפה. ושפתה, $\partial S_n^+ = i(S^{n-1})$

עליה נפעיל את הנחת האינדוקציה.

נסמן: $V = (\mathbb{R}y)^{\perp} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

ו- $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow V$ ההטלה האורתוגונלית.

נגדיר: $h = \pi \circ f_+ : S_n^+ \longrightarrow V \cong \mathbb{R}^n$

נשים לב: $h|_{i(S^{n-1})} = h|_{\partial S_n^+}$

אז מאחר כי f אי-זוגית
ו- π ליניארית

ו- $h|_{\partial S_n^+} : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (משתכנעת) (*)

<u>מהנחת האינדוקציה:</u>

$$\omega_2(h|_{i(S^{n-1})}, 0) = 1$$

<u>נשים לב</u>: משפט קודם + תנאי: 0 ערך רגולרי של h

$$1 = \omega_2(h|_{i(S^{n-1})}, 0) = |h^{-1}(0)| \pmod 2$$

$$= |f_+^{-1}(\mathbb{R}y)| \pmod 2$$

(**)

$$= \omega_2(f, 0)$$