20/12/2016 הרצאה 16:

פרק 4: דרגה של העתקה (degree)

הגדרה:

$f,g: M \to N$ נקראות הומוטופיות בצורה חלקה אם קיימת

פ' חלקה $F: M\times[0,1] \to N$ כך ש-

$$\begin{cases} F(x,0) = f(x) \\ F(x,1) = g(x) \end{cases}$$

נסמן: $F_t(x) := F(x,t)$

נשים לב שמדובר ביחס שקילות ונסמן $[f]$ את מחלקת השקילות של f.

הערה:

אם f,g כנ"ל חלקות אבל הומוטופיות בצורה רציפה, אזי ע"י קירובים ניתן "לשפר" להומוטופיה חלקה.

הערה:

$f: M \to \mathbb{R}^n$ הינו הומוטופית בצורה חלקה להעתקת האפס (f חלקה)

$$F(t,x) = tf(x)$$

תזכורת: משפט ערימת התקליטים

$f: M \to N$ חלקה. M קומפקטית (מספיק עד סוף ההרצאה)

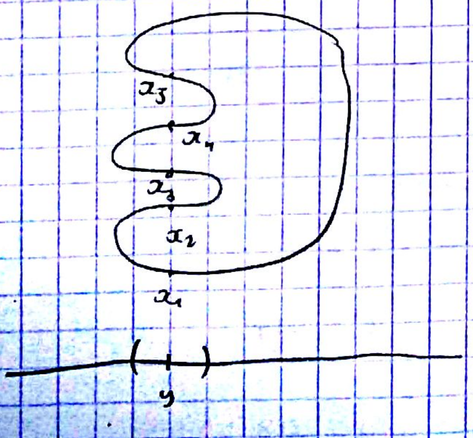
ו- N קשירה ו- $\dim M = \dim N$. $y \in N$ ערך רגולרי.

$$f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$$

וקיימת סביבה פתוחה U של y כך ש-

$$f^{-1}(U) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$$

ו- $f: V_i \to U$ דיפאו'.



מסקנה:

$|f^{-1}(y)|$ קבועה ב- U ← העוצמה של הקבוצה $f^{-1}(y)$

דרגה מודולו 2:

הגדרה:

f כנ"ל (כלומר מקיימת את תנאי משפט [illegible]) אזי:

$$\deg_2(f,y) = |f^{-1}(y)| \pmod 2$$

טענה:

$f: M \to N$ חלקה, M קומפקטית, N קשירה $\dim M = \dim N$

$f, g: M \to N$ הומוטופיות בצורה חלקה

ו-y ערך רגולרי של f **ושל** g אזי:

$\deg_2(f,y) = \deg_2(g,y)$ (מודולו 2)

הוכחה:

תהי $F: M\times[0,1] \longrightarrow N$ הומוטופיה חלקה "בין f ל-g".

מקרה א':

y ערך רגולרי של F.

נסתכל על $F^{-1}(y)$. לפי RVT (גרסה מניפולד עם שפה)

$F^{-1}(y)$: תת-יריעה ממימד 1 קומפקטית עם שפה:

$$\partial F^{-1}(y) = F^{-1}(y) \cap \partial(M\times[0,1]) =$$

$$= F^{-1}(y) \cap \{M\times\{0\} \cup M\times\{1\}\} =$$

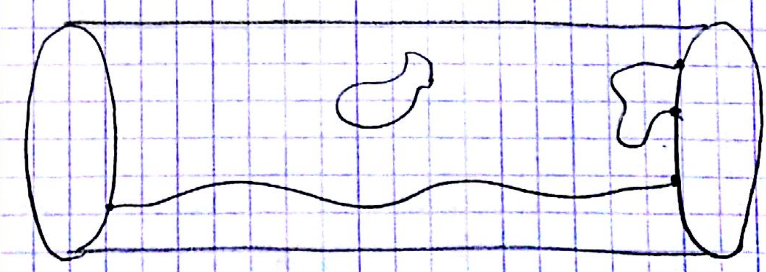
$$= f^{-1}(y)\times\{0\} \cup g^{-1}(y)\times\{1\}$$

נשתמש עכשיו: מיון של יריעות חד ממדיות (קומפקטיות + שפה)

$\Longrightarrow$ $|\partial F^{-1}(y)|$ זוגי.

התמונה:

$F^{-1}(y)$



$M\times\{0\}$ $M\times\{1\}$

$\Longrightarrow$ הסכום $|f^{-1}(y)| + |g^{-1}(y)|$ זוגי (מוד 2) ולכן הם שווים (מוד 2)

■

מקרה ב':

y אינו ערך רגולרי של F.

נקח סביבות פתוחות U_f, U_g כך ש- $|f^{-1}(y)|$, $|g^{-1}(y)|$ קבוע על $U_f \cap U_g$.

ממשפט Sard $\Leftarrow$ קיים ערך רגולרי $\tilde{y} \in U_f \cap U_g$ של F.

$$\text{even} = |\partial F^{-1}(\tilde{y})| = |f^{-1}(\tilde{y})| + |g^{-1}(y)| \pmod 2 =$$
$$= |f^{-1}(y)| + |g^{-1}(y)|$$

הגדרה:

נאמר ש: $f,g : M \longrightarrow N$ הן איזוטופיות בצורה חלקה, אם קיימת

כ' חלקה $F: M\times[0,1] \longrightarrow N$,
$$\begin{cases} F(x,0) = f(x) \\ F(x,1) = g(x) \end{cases}$$

ו- F_t דיפאו' $\forall t \in [0,1]$.

טענה: ("כולם שווים"):

$y,z \in N$, N קשירה וחלקה. אזי קיים דיפאומורפיזם $h: N \longrightarrow N$

כך ש:
1) $h(y) = z$
2) h איזוטופי חלק ל- Id
3) $\forall t \in [0,1]$ $\overline{\{x \in N \mid h_t(x) \neq x\}}$ קומפקטי.

הוכחת הטענה:

רעיון:

נקבע y ונסתכל על כל ה- z-ים המקיימים את תנאי המשפט.

זאת מחלקת שקילות. נראה שזאת קבוצה פתוחה.

ומהקשירות נקבל $\Longleftarrow$ יש רק אחת כזאת ("הכל" N)

ולכן מסיים את הטענה.

<u>הוכחה:</u>

באינדוקציה (על בחירת מפות) $N=\mathbb{R}^n$ ו- $y=0$. (להשתכנע).

נבחר בסיס שבו $z=(z_1,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$

(כלומר נבחר מפה כך ש- y הוא הראשית ו- z נמצאת על ציר ה-x)

נבחר $f_n\in C^\infty(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R})$ כך ש- $f_n(0)=1$ ו- $f_n(x)=0$ עבור $\|x\|\geq\varepsilon$

נגדיר:

$$h_t:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}\longrightarrow N=\mathbb{R}^n$$

$$(a,b)\longmapsto(a+tf_{n-1}(b)f_1(a)z_1\,,\,b)$$

נשים לב ש- $h_0=\mathbb{1}$, $h_1(y)=h_1(0)=z$

$h_t(x)=x$ $\varepsilon\leq\|x\|$.

נשתכנע שמדובר בדיפאו' לכל $t\in[0,1]$

נקח את הקומפוננטה הראשונה:

$$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$g(a)=a+tf_{n-1}(b)f_1(a)z_1$$

$$g'(a)=1+tf_{n-1}(b)f_1'(a)z_1$$

ולכן עבור z מספיק קטן $g'(a)>0$ $\forall t\in[0,1]$

נסתכל על:

$$dh_t\Big|_{(a,b)}=\left(\begin{array}{c|c}1+tf_{n-1}(b)f_1'(a)z_1 & (*) \\ \hline 0 & Id\end{array}\right)$$

ולכן, ממשפט הפ' ההפוכה נקבל מש"ל.

<u>מסקנה:</u>

M קומפקטית (בלי שפה) N קשירה $\dim M=\dim N$

y רגולרי.

$\Longleftarrow$ $\deg_2(f,y)$ לא תלוי ב- y אלא רק במחלקת שקילות

של הומוטופיות חלקות.

<u>הוכחה:</u>

נקח h_t מהטענה הקודמת $h_1(y)=z$ $\Longleftarrow$ z ערך רגולרי

של $h_1\circ f$ ומתקיים:

Scanned by CamScanner

$$|f^{-1}(y)| \underset{\uparrow}{=} |(h_1\circ f)^{-1}(z)| \underset{\uparrow}{=} |f^{-1}(z)| \pmod 2$$

$y = h_1^{-1}(z)$ מטענה קודמת קודמת

<u>הגדרה $deg_2(f)$</u>

נאמר של- f יש דרגה זוגית (אי זוגית) אם $deg_2 f = 0 \pmod 2$ (אחרת).

<u>תרגיל:</u>

להעתקת הזהות - Id יש דרגה אי זוגית $(Id: M \to M)$

<u>תרגיל:</u>

להעתקה הקבועה $f: M \to M$ $f(\text{"}M\text{"}) = c$ יש דרגה זוגית.

<u>מסקנה:</u>

העתקת הזהות וההעתקה הקבועה לא הומוטופיות בצורה חלקה.

<u>מסקנה:</u>

לא קיימת $F: D^{n+1} \to S^n$ חלקה כך ש- $F|_{S^n} = Id$

כי אם היתה קיימת העתקה כנ"ל. נגדיר אותה על S^n.

חלקה $\phi(t, x) = F(t, x) : S^n \times [0,1] \to S^n$

$$\begin{cases} \phi(0, x) = F(0) & const \\ \phi(1, x) = F(x)|_{S^n} = Id \end{cases}$$

<u>תרגיל:</u>

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ קומפקטי, קשיר, חלק מאותו המימד, אזי:

$$deg_2(g\circ f) = deg_2(f) \cdot deg_2(g)$$

<u>תרגיל</u> (נשוט בכיתה ??)

אם קיים שדה וקטורי חלק ולא מתאפס על S^n אזי קיימת הומוטופיה חלקה בין העתקת הזהות ל- $\phi(x) = -x$

<u>הערה:</u>

אם n אי זוגי אזי $Id \sim \phi(x) = -x$

רמז: להסתכל על $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ ולקחת כפל ב- i

הגדרה:

מספר פיתול מודולו 2 (winding number)

N קומפקטית, $\dim N = n$. $f: N \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ חלקה

$y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus f(N)$

$$v: N \longrightarrow S^n$$

$$v(x) = \frac{f(x) - y}{\|f(x) - y\|}$$

$$\omega_2(f,y) := \deg_2(v)$$

הערה:

מרוכבות, אם $N = S^1$ אז $\omega_2(f,y)$ זה מספר הפיתול "הסטנדרטי" של עקומה סגורה $f(N)$ סביב y. (מודולו 2)

משפט:

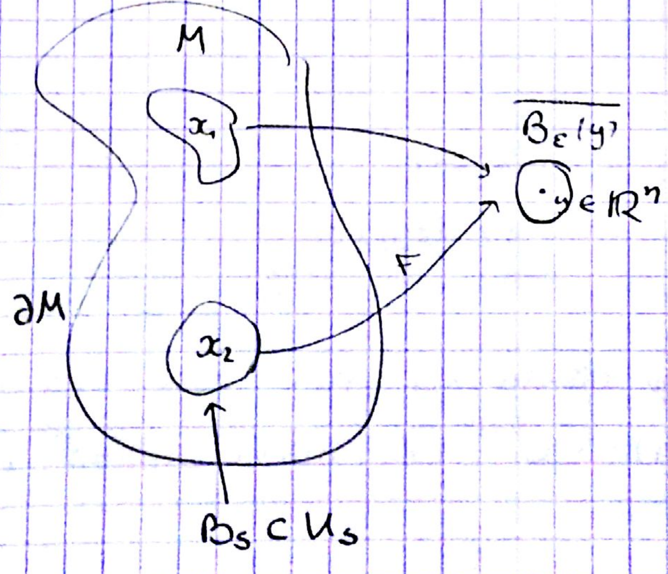
M קומפקטית חלקה, שפה לא ריקה $\partial M \neq \emptyset$. $\dim M = n$.

$f: \partial M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ חלקה.

$F: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ חלקה כך ש- $F|_{\partial M} = f$

אם $y \notin f(\partial M)$ ערך רגולרי של F אזי $F^{-1}(y)$ קבוצה סופית ומתקיים:

$$\omega_2(f,y) = |F^{-1}(y)| \pmod 2$$



הסגור של התמונה ההפוכה ע"י F^{-1}

של $\overline{B_\varepsilon(y)}$

הוכחה:

מקרה א':

$y\notin F(M)$ (כי y הוא ערך רגולרי לפי ההגדרה)

נגדיר $V(x)=\frac{F(x)-y}{\|F(x)-y\|}$ ו- $V|_{\partial M}=v$

(מוגדר היטב).

מ- SARD ⟸ קיים ערך רגולרי $z\in S^{n-1}$ עבור v וגם V

⟸ $V^{-1}(z)$ יריעה קומפקטית (מ- RVT - היריעה עם שפה)

ממימד 1. $\partial V^{-1}(z)=\partial M\cap V^{-1}(z)=v^{-1}(z)$ וגם

ממיון של יריעות קומפקטיות:

$$\omega_2(f,y)=deg_2(v)=0=|F^{-1}(y)|$$

מקרה ב:

$F^{-1}(y)\neq\phi$ ($y\notin f(\partial M)$ - נזכור).

ממשפט ערימת התקליטים:

$$M\supseteq F^{-1}(y)=\{x_1,\dots,x_N\}$$

ויש סביבות פתוחות U_i של x_i ו- $\tilde U$ פתוחה של y כך ש-

$F|_{U_i}:U_i\to\tilde U$ דיפאו'.

נקח $\overline{B_\varepsilon(y)}\subset\tilde U$. נגדיר:

$$B_j := F^{-1}(\overline{B_\varepsilon(y)})\cap U_j\subseteq U_j$$

נגדיר: $\tilde M = M\setminus\bigcup_{j=1}^{N} int(B_j)$

$$\tilde F=F|_{\tilde M}\quad,\quad \tilde V=V|_{\tilde M}\qquad \tilde v=V|_{\partial\tilde M}$$

נשים לב $y\notin\tilde F(\tilde M)$ ואנחנו חזרה במקרה הראשון.

⟸ $\tilde v$ דרגה זוגית.

בנוסף: $\tilde v^{-1}(z)=v^{-1}(z)\cup v_1^{-1}(z)\cup\dots\cup v_k^{-1}(z)$

כאשר $v_s:\partial B_s\longrightarrow S^{n-1}$

$$v_s(x)=\frac{F(x)-y}{\|F(x)-y\|}=\frac{F(x)-y}{\varepsilon}$$

קיבלנו: $0=deg_2(\tilde v)=deg_2(v)+\sum_{s=1}^{N} deg_2(\tilde v_s) \pmod 2$

ולכן: $deg_2(v)=\sum_{s=1}^{N} deg_2(\tilde v_s)$

$\Longleftarrow$ מהבחירה של B_s $\Longleftarrow$ $\deg_2 V_s = 1$

$\Longleftarrow$ $\deg_2(V) = N \pmod 2 = |F^{-1}(y)| \bmod (2)$

$\blacksquare$