19/12/2016 הרצאה 15

תזכורת: שדות וקטורים $\mathfrak{X}(M)$, $\Gamma(TM)$

מה: מודול מעל $C^\infty(M)$, אלגברת לי $[X;Y]$

⊙ משוכה לאחור 'pull back' , $\phi: M\to N$: $(\phi^* X)(f) = f\circ\phi$

⊙ 'לדחוף קדימה' push forward

אם $\phi: M\to N$ דיפאו יש דרך טבעית לדחוף קדימה, והיא:

$$(\phi_* X)(p) = d\phi_{\phi^{-1}(p)} X_{\phi^{-1}(p)}$$

נוסחת טיילור:

יש קשר בין שדות וקטורים וזרימה. הקשר נתון באופן הבא:
מד"ר.

$$\frac{d}{dt}\phi_x^t = X\circ\phi_x^t \leftarrow \begin{cases}\phi_x^{t+s} = \phi_x^t\circ\phi_x^s \\ \phi_x^0 = Id\end{cases}$$

נוסחת טיילור:

$$f(\phi_x^t) = f + tX(f) + \frac{t^2}{2!}X(X(f)) + \dots + o(t^{k+1})$$

למה שדות וקטורים (למה מתעסקים בהם)?

1) קשר למד"ר

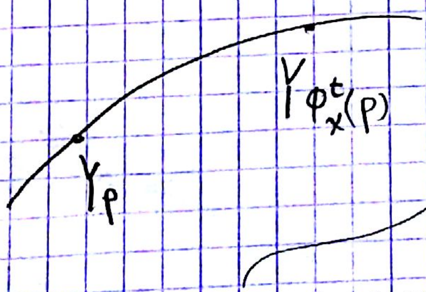
2) מאפשרים לנו לגזור

$$\mathcal{L}_X f = Xf = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi_t^X)^* f$$

נגזרת פורמלית $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. ה- flow

נותן את הפונקציה השואפת לנק' הקודמת בזמן.

לי כה שמושכים את ה- flow



ה- push forward נותן לנו דרך להשוות בין המו' Y ל- X_{-t}

נגזרת לי $\to \mathcal{L}_X Y = \lim_{t\to 0} \dfrac{d\phi_X^{-t} Y_{\phi_X^t(p)} - Y(p)}{t} =$

זה מה שקורה לשדה הווקטורי $\mathcal{L}_X Y$ בנק' p

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_X^{-t})_* Y_{\phi_X^t(p)}$$

$$\phi_X^{-t} : M \longrightarrow M$$

$$\phi_X^t(p) \longrightarrow p$$

$$d\phi_X^{-t} : T_{\phi_X^t(p)} \longrightarrow T_p M$$

<u>טענה:</u>

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

ראינו שמקיים תנאי דרגציה.

<u>הוכחה:</u>

$$\lim_{t\to 0} \frac{d\phi_X^{-t} Y \phi_X^t(p) - Y(p)}{t} = -\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[Y_p(f) - (\phi_X^{-t})_* Y_{\phi_X^t(p)}(f)\right] =$$

השתמשנו כראות ההגדרה

$$= -\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[Y_p(f) - Y_{\phi_X^t(p)}(f \circ \phi_X^{-t})\right] =$$

$$= -\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[Y_p(f) - Y_{\phi_X^t(p)}\left(f - tX(f) + o(t^2)\right)\right] =$$

$$= -\lim \frac{Y_p(f) - Y_{\phi_X^t(p)}(f)}{t} + Y_p(X(f)) = -\lim_{t\to 0} \frac{(Y(f) \circ \phi_X^t)(p) - Y_p(f)}{t} + Y_p(X(f))$$

$$= X(Y(f)) - Y(X(f))$$

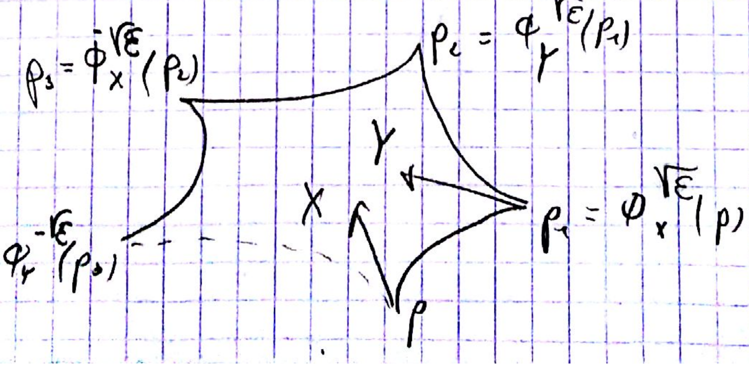
<u>טענה:</u> (נותנים ל- $L_X Y$ משמעות דינמית)

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0^+} \gamma_p(\varepsilon) = \mathcal{L}_X Y_p$$

כאשר:

ה"וקטור" מגדיר את γ ע"י flow של ה"וקטור"

$$\gamma_p(\varepsilon) = \phi_Y^{-\sqrt{\varepsilon}} \circ \phi_X^{-\sqrt{\varepsilon}} \circ \phi_Y^{\sqrt{\varepsilon}} \circ \phi_X^{\sqrt{\varepsilon}}$$



הוכחה:

(הטענה מקומית) נקח מפת קורדינטות סביב p :

$$(U, x^1, \dots, x^n)$$

$$X = \sum^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad Y = \sum^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$[X,Y](x^i) = X(Y^i) - Y(X^i)$$

פונקציות הקורדינטה.

נפעיל את טיילור על כל קורדינטה.

נוסחות טיילור

$$\begin{cases} x^i(p_1) = x^i(p) + \sqrt{\varepsilon}\, X^i(p) + \frac{1}{2}\varepsilon X^2(x^i)(p) + o(\varepsilon^{3/2}) \\ x^i(p_2) = x^i(p_1) + \sqrt{\varepsilon}\, Y^i(p_1) + \frac{1}{2}\varepsilon Y^2(x^i)(p) + o(\varepsilon^{3/2}) = \end{cases}$$

$$= x^i(p) + \sqrt{\varepsilon}\, X^i(p) + \frac{1}{2}\varepsilon X^2(x^i)(p) + \sqrt{\varepsilon}\, Y^i(p_1) + \frac{1}{2}\varepsilon Y^2(x^i)(p_1) + o(\varepsilon^{3/2})$$

שוב מנוסחת טיילור:

$$Y^i(p_1) = Y^i(\varphi_X^{\sqrt{\varepsilon}}(p)) = Y^i(p) + \sqrt{\varepsilon}\, X(Y^i)(p) + o(\varepsilon)$$

באופן דומה:

$$Y^2(x^i)(p_1) = Y^2(x^i)(\varphi_X^{\sqrt{\varepsilon}}(p)) = Y^2(x^i)(p) + \sqrt{\varepsilon}\, Y^2(x^i)(p) + o(\varepsilon)$$

מקבלים:

$$x^i(p_2) = x^i(p) + \sqrt{\varepsilon}\,(Y^i(p) + X^i(p)) + \varepsilon\ \frac{1}{2} Y^2(x^i)(p) + X Y^i(p) + \frac{1}{2} X^2(x^i)(p) + o(\varepsilon^{3/2})$$

עוד פעם אחת (בבות)

$$x^i(\gamma_p(\varepsilon)) = x^i(p) + \varepsilon\left[X(Y^i)(p) - Y(X^i)(p)\right] + o(\varepsilon^{3/2})$$

Scanned by CamScanner