13/12/2016 הרצאה 14:

פרק ט' - שדות וקטורים:

$X: M \to TM$ חלקה & $\pi \circ X = Id$

$X: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $X(fg) = fX(g) + gX(f)$ (*)

ליניארית

קואורדינטות מקומיות $\varphi = (x_1, \dots, x_n): U \to \mathbb{R}^n$

$$X(a) = \sum f_i(a) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

פ' חלקות:

"Lie derivative"

$$L_X f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ c)$$

סימון: $\mathfrak{X}(M)$ או $\Gamma(TM)$ - אוסף כל השדות הוקטורים על M.

כהו מ"ו מעל $\mathbb{R}$, מודול מעל $C^\infty(M)$: $f \cdot X = f(a)X(a)$

לא אלגברה ביחס לפעולת ההרכבה

(דוגמא: $\mathbb{R}$, $Y = X = \frac{\partial}{\partial x}$, $f'' = X(Y(f))$ לא מקיים (*)).

ראינו שזה שדה וקטורי: $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$

הסבר (תרגיל)

$X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$

משתמשים בכך שנגזרות שניות "מתחלפות"

$$[X,Y](f) = \dots = \sum_{k,l=1}^{n} \left(a_k \frac{\partial b_l}{\partial x_k} - b_k \frac{\partial a_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_l} f$$

תרגיל:

(נסגרת ל- $\mathbb{R}$ ($[X,Y]$) העתקה בי ליניארית ואנטי סימטרית

(לא בי ליניארית מעל $C^\infty(M)$)

תרגיל:

$$[X, hY] = X(h)Y + h[X,Y]$$

גם (טענה) מקיימת זהות יעקובי: $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$$ (תרגיל)

הגדרה:

אלגברת לי (Lie) זה מרחב וקטורי (מעל $\mathbb{R}$) המצויד בהעתקה

בי לינארית $[\cdot,\cdot] : V\times V \longrightarrow V$ (Lie bracket)

בי לינארית, אנטי סימטרית, מקיימת זהות יעקובי.

הסבר לשימוש במילה נגזרת:

נקבע $X\in\Gamma(TM)$ $\quad L_X : \Gamma(TM)\longrightarrow\Gamma(TM)$

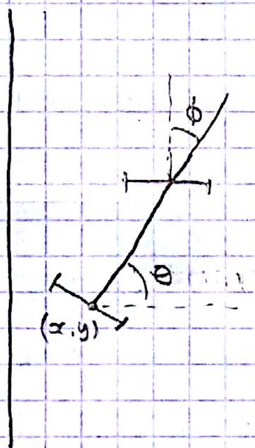
$$L_X(Y) = [X,Y]$$

זהות יעקובי $\Longleftarrow$

$$L_X([Y,Z]) = [L_X(Y), Z] + [Y, L_X(Z)]$$

ובאות תכונת דרבוקס.

מכונה (תרגול) : נסתכל על חניה במקביל



drive $= \cos\phi\,(\cos\theta\,\partial_x+\sin\theta\,\partial_y)+\sin\phi\,\partial_\theta$

steer (פנה) $= \partial_\phi$ גלגלים קדמיים

skid (החלק) $= -\sin\phi\,(\cos\theta\,\partial_x+\sin\theta\,\partial_y)+\cos\phi\,\partial_\theta$

park (חנה) $= -\sin\theta\,\partial_x+\cos\theta\,\partial_y$

$\leftarrow$ להשתכנע שהשדות מתאימים

$\leftarrow$ לחשב את כל הקומוטטורים האפשריים.

אלגברת לי ל- $\Gamma(TM)$

אם $F: M\longrightarrow N$

(נסיון) ל- push forward. $p\in M$, $v\in T_pM$

$$\Longleftarrow \quad \omega = d_pF(v)\in T_{F(p)}N$$

$q=F(p)$ $\qquad Y(q) = dF_p(X(p))$

חסר משמעות למשל אם F לא חח"ע...

נשים לב שאם F דיפאומורפיזם, **הכל בסדר** (אבל לא חייבים דיפאו).

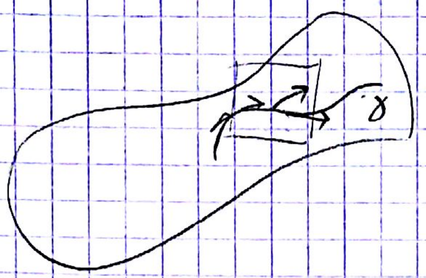
$$F_*X\in\Gamma(TN)$$

$$F_*X(q) = dF_{F^{-1}(q)}X_{F^{-1}(q)}$$

שדות וקטורים וזרימה:

הגדרה:

בהינתן שדה וקטורי X. עקומה $\gamma: I \to M$ נקראת עקומה אינטגרלית של השדה X אם $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$



בקורדינטות מקומיות:

$(U, (x_1, \dots, x_n))$

$$\gamma^i(t) = x_i(\gamma(t))$$

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \sum \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\frac{d\gamma^i}{dt} = X^i(\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(n)}(t))$$

קיבלנו מד"ר מסדר I.

מהמשפט הקיומי במד"ר:

בהינתן תנאי התחלה יש פתרון יחיד.

לכל X ולכל נקודה $p \in M$ קיימת ויחידה עקומה אינטגרלית

דרך הנקודה $p \in M$

$$c_p(t): I \to M, \quad c_p(0) = p, \quad \dot{c}_p(t) = X_{c_p(t)}$$

"חלקות ביחס לתנאי התחלה"

זרימה (flow):

$\theta: \mathbb{R} \times M \to M$ → חלקה כזין (כהעתקה חלקה בין יריעות חלקות)

$\theta(0, p) = p$, (Id)

$\theta(t+s, p) = \theta(t, \theta(s, p))$

שדה וקטורי $\Longleftarrow$ זרימה (בקומפקט מוגדר לכל זמן $\mathbb{R}$

אחרת באיזשהו אינטרוול).

סימון סטנדרטי:

$$\phi_X^t(p) = C_p(t)$$

הקשר בין שדה וקטורי וזרימה $\leftarrow$ $\boxed{\frac{d}{dt}\phi_X^t(p) = X\circ\phi_X^t}$

$$\phi_X^{t+s} = \phi_X^t\circ\phi_X^s$$

קשר בין שדה וקטורי לזרימה: $\frac{d}{dt}\phi_X^t = X\circ\phi_X^t$

שדה וקטורי נקרא שלם אם לכל נקודה יש עקומה אינטגרלית דרכה.

(כל שדה וקטורי קומפקטי הוא שלם).

האם אפשר "לדחוף קדימה" שדה וקטורי?

הגדרה:

$f: M^m \to N^n$ חלקה $X\in\Gamma(TM)$, $Y\in\Gamma(TN)$.

נאמר ש- X ו- Y הם f-קשורים (f-related)

אם: $\forall p\in M \quad df(X(p)) = Y_{f(p)}$

$$(df(X) = Y\circ f)$$

טענה: X, Y הם f קשורים אמ"מ: $\overbrace{f\circ\phi_X^t = \phi_Y^t\circ f}^{(*)}$ עבור t מספיק קטן.

הוכחה:

נניח $(*)$.

$$df(X) = df\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi_X^t)\right) \overset{\text{כלל שרשרת}}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ\phi_X^t) \overset{(*)}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi_Y^t\circ f) =$$

$$= Y\circ\phi_Y^0 f = Y\circ f$$

בכיוון השני:

נניח $df(X) = Y\circ f$

$$\frac{d}{dt}(f\circ \phi_X^t) = df\left(\frac{d}{dt}\phi_X^t\right) = df(X\circ \phi_X^t) = Y\circ f\circ \phi_X^t = \frac{d}{dt}(\phi_Y^t\circ f)$$

מכיוון ששתי העקומות

$$\begin{cases} t \longrightarrow f\circ \phi_X^t \\ t \longrightarrow \phi_Y^t\circ f \end{cases}$$

מסכימות בזמן $t=0$ סיימנו.

<u>תזכורת</u>:

אם $\phi: M\longrightarrow N$ $\quad \phi^*: C^\infty(N)\longrightarrow C^\infty(M)$

$$f \longmapsto \phi^* f = f\circ\phi$$

ונניח ϕ דיפאומורפיזם: $(\phi_*(X))(q) = (d\phi_{\phi^{-1}(q)})(X_{\phi^{-1}(q)})$

נחזור לנגזרת Lie: $L_X: \Gamma(TM)\longrightarrow\Gamma(TM)$ מקיים תכונות דריבציה.

<u>טענה</u>:

1) $X\in\Gamma(TM)$ (שלם) $f\in C^\infty(M)$.

$$Xf = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\underset{\substack{\uparrow \\ \text{flow of } X}}{\phi_t^*} f$$

(מהגדרה) $\qquad$ (מה ה- pullback של Φ_t שהוא ה-flow ?)

2) $$[X,Y] := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi_{-t}^X)_*\, Y_{\phi_t} = \lim_{t\to 0}\frac{Y-(\phi_{-t}^X)_* Y_{\phi_t^X}}{t}$$

$$L_X Y(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d(\phi_{-t}^X)\Big|_{\phi_t^X(p)}\circ Y(\phi_t^X(p)) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{d(\phi_{-t}^X)_{\phi_t^X(p)}\cdot Y_{\phi_t^X(p)} - Y_p}{t}$$

הכנה: נוסחאות טיילור

X שדה וקטורי על M ו- $f\in C^\infty(M)$

$$f\circ\phi_X^t = f + tX(f) + \frac{t^2}{2!}X^2(f) + \dots + o(t^{k+1})$$

$$X^2(f) = \underbrace{X(X(f))}_{\text{הרכבה}}$$

הוכחה:

נשתמש במשפט טיילור לפונקציה $t\longrightarrow f(\phi_X^t(p))$ $(\mathbb{R}\to\mathbb{R})$

מספיק להראות:

$$\frac{d^k}{dt^k} f(\phi_X^t(p))\Big|_{t=0} = X^k(f)(p)$$

עבור $k=0$ - הגדרה.

עבור $k=1$:

$$\frac{d}{dt} f(\phi_X^t(p)) \overset{\text{כלל השרשרת}}{=} d_{\phi_X^t(p)} f\circ X_{\phi_X^t(p)} = X_{\phi_X^t(p)}(f) = X(f)(\phi_X^t(p))$$

המשך הוכחה באינדוקציה (לבדוק).

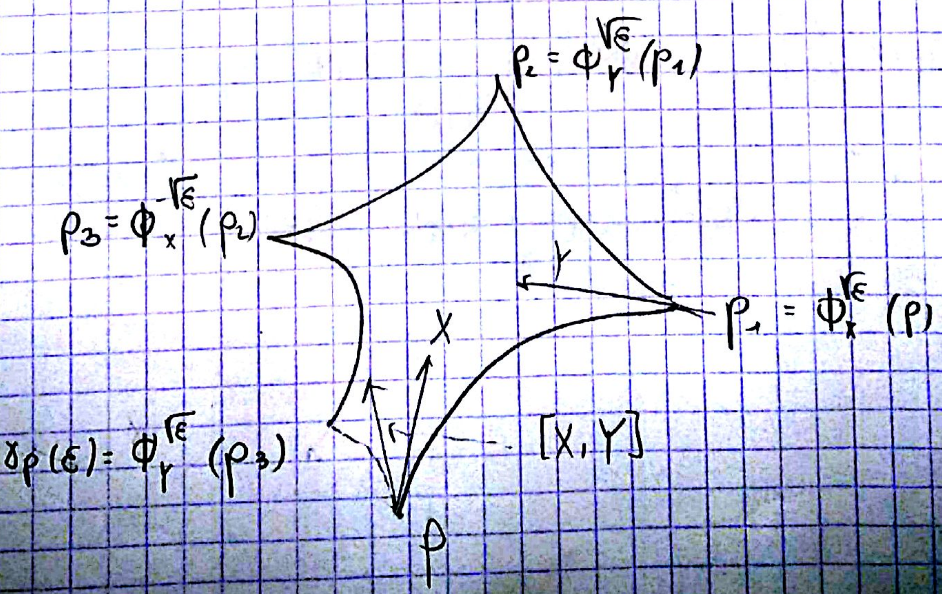
סימון סטנדרטי: $\phi_X^t = \exp(tX)$

טענה ב':

$X,Y\in\Gamma(TM)$ אזי:

$$\gamma_p(\varepsilon) = \phi_Y^{-\sqrt{\varepsilon}}\circ\phi_X^{-\sqrt{\varepsilon}}\circ\phi_Y^{\sqrt{\varepsilon}}\circ\phi_X^{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$[X,Y]_p = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0^+}\gamma_p(\varepsilon)$$



ציור עבור שאלה 1c: