12/12/2016

הרצאה 13:

שימושים למשפט RVT

- שיכונים לתוך $\mathbb{R}^n$
- וויטני
- טרנסברסליות
- משפט נק' השבת של בראוור.
- הוכחה למשפט היסודי של האלגברה:

סקיצה:

$p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ פ' מרוכב.

$$f: S^2\longrightarrow S^2$$

$$\begin{cases} f(p) = \pi_+^{-1}\circ p\circ\pi_+(p) \\ f(0,0,1) = (0,0,1) \end{cases}$$

הוכחנו בשבוע שעבר ש-f חלקה.

df_p סינגולרי אמ"מ $\pi_+(p)$ שורש של $p'(z)$ - תרגיל.

- נק' רגולריות של f: $S^2\setminus\{x_1,\dots,x_m\}$
- $f^{-1}(q)$ קבועה מקומית. (משפט ערימת התקליטים)

q ערך רגולרי.

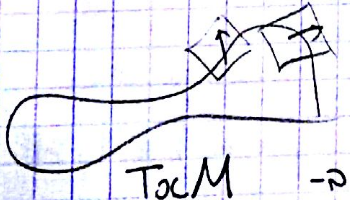
$\Longrightarrow$ ולכן $f^{-1}(q)$ אף פעם לא מתאפסת.

ולכן f הוא על. בפרט $\exists p.\ f(p)=(0,0,-1)$

ונקבל:

$$p\circ\pi_+(p) = \pi_+(f(p)) = 0$$

וזה מה שרצינו.



פרק ג: שדות וקטורים:

דרך להתאים בצורה חלקה לנק' x וקטור ב- T_xM

הגדרה I:

שדה וקטורי X על יריעה M הוא חלק אם לכל מפת קורדינטות: $\varphi(x_1,\dots,x_n): U \longrightarrow \mathbb{R}^n$

ולכל נקודה $a\in U$ מתקיים ש:

$$X(a) = \sum f_i(a)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_a$$

עבור פ׳ חלקות f_i

נשים לב:

$$\forall a\in U,\quad f_i(a) = (dx_i)_a X(a)$$

$\Leftarrow$ ההרכבה: $(x_1,\dots,x_n,dx_1,\dots,dx_n)\circ X: U\longrightarrow \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$
חלקה.

הגדרה II:

X שדה וקטורי חלק על M אם:

$X: M\longrightarrow TM$ העתקה חלקה, $\pi\circ X = Id$

הגדרה III:

X שדה וקטורי חלק על M. $C^\infty(M\to\mathbb{R})$

זו העתקה לינארית: $X: C^\infty(M)\longrightarrow C^\infty(M)$

המקיימת תנאי דריבציה:

$$X(fg) = f\,X(g) + g\,X(f),\quad \forall f,g\in C^\infty(M)$$

הערה:

גם בהגדרה ה"גיאומטרית" שדה וקטורי פועל באותו אופן על פונקציות

$v=[c]\in T_pM$ נסמן נגזרת ל-f:

$$v(f) \equiv \mathcal{L}_v f \equiv \partial_v f = \frac{d(f\circ c)}{dt}(0)$$

סימונים

תרגול:

- מוגדר היטב ואינו תלוי בקואורד׳.

שדות וקטורים: $M \longrightarrow TM$: X

"האופרטור הדיפרנציאלי": $X[f](x) = df_x \circ X(x)$

בקורדינטות:

$$df_x = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad , \quad X(f) = x^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$X = \sum x^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

תרגול: לעבור מהגדרה III להגדרה II

(רמז: להסתכל בדריבציות בהקשר של המרחב המשיק).

סימון:

אוסף השדות הוקטורים $\Gamma(TM)$, $\mathfrak{X}(M)$

תרגול:

הטענות הבאות שקולות:

1) $X: M \longrightarrow TM$, $\pi \circ X = Id$, חלק.

2) לכל __מערכת קורדינטות__ $(U,(x_1,\dots,x_n))$

הפונקציות f_i מהקודם חלקות.

3) לכל קבוצה פתוחה $V \subset M$ ו- $f \in C^\infty(V)$ מתקיים ש-

$X(f) \in C^\infty(M)$

הערה:

1) $\mathfrak{X}(M)$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$ (ברור).

בנוסף (משפה אלגברית) הוא מודול מעל C^∞.

ע"י: $(fX)(a) = f(a)X(a)$

2) לא נכון ש- $C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$

$f \longrightarrow X(Y(f))$ היא לינארית.

לכן לא אלגברה במובן "כפל" הסטנדרטי.

למה?

$\mathbb{R}$, $Y = X = \frac{\partial}{\partial x}$

$$X(Y(f)) = f''$$

$$(fg)'' = f''g + 2g'f' + fg'' \neq f''g + fg''$$

טענה (+ **הגדרה**):

בהינתן $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ נגדיר:

$$C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$$f \longmapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$$

אז **זה** שדה וקטורי (Lie bracket) או הקומוטטור של X ; Y : $([X, Y])$

הוכחה:

$$[X,Y](fg) = X(Y(fg)) - Y(X(fg)) =$$

$$= X((Y(f))g + f(Y(g))) - Y(X(f)g + fX(g)) =$$

$$= X(Y(f))g + \cancel{X(g)Y(f)} + \cancel{X(f)Y(g)} + fX(Y(g)) -$$

$$-[Y(X(f))g + \cancel{Y(g)X(f)} + \cancel{Y(f)X(g)} + fY(X(g))] =$$

$$= ([X,Y]f)g + f([X,Y]g)$$

Scanned by CamScanner