6/12/2016

תרגול 12:

משפט RVT

$f: M^m \to N^n$ חלקה, y ערך רגולרי $\Leftarrow$ $f^{-1}(y)$ יריעה חלקה
(משוכנת ב-N) ממימד $m-n$ ובנוסף $T_x f^{-1}(y) = \ker d_x f$

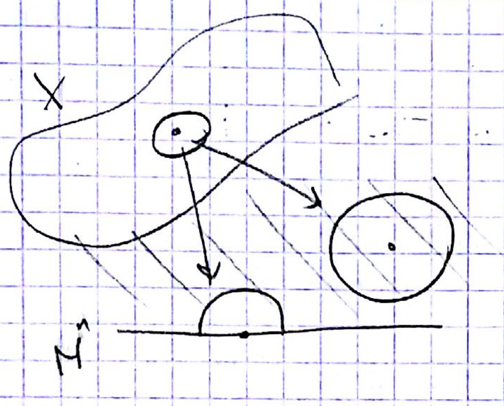
שימושים:

1) שיכונים לתוך $\mathbb{R}^N$ (בפרט משפט וויטני $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$)

2) $M \pitchfork N$, $M,N \subset Y$ $\Leftarrow$ $M \cap N$ יריעה חלקה (תת יריעה ב-Y)

3) Brouwer fixed point theorem

4) המשפט היסודי של האלגברה.



יריעות עם שפה:

שתי הגדרות שקולות:

$$H^n = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

רק הקואורדינטה האחרונה.

אטלס

f חלקה:

נסמן $V \subset [0,\Delta) \times \mathbb{R}^{n-1} = (H^n_\Delta)$ פתוחה.

$f: V \to \mathbb{R}^m$ חלקה אם לכל נק' $x \in V$ יש סביבה פתוחה $\tilde{V}$ ב-$\mathbb{R}^n$
ו-פ' חלקה $\tilde{f}: \tilde{V} \to \mathbb{R}^m$ כך ש- $\tilde{f}|_{\tilde{V} \cap V} = f$

תרגיל:

M יריעה עם שפה.

1) להגדיר את T_pM - 2 הגדרות. ההגדרה הסימטרית, במקום
לקחת מסלול $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ ניקח $\alpha: (-\varepsilon, 0] \to M$
$\beta: [0, \varepsilon) \to M$

2) דיפרנציאל.

★ תרגיל: ∂X יריעה ממימד $n-1$ (אוסף כל התחלפות
ההומאומורפיזמים שמעבירים אותם ל-H^n הם לא חשובים, של H^n.

Scanned by CamScanner

משפט RVT ליריעות עם שפה:

$f:M^m\to N^n$ (M יריעה עם שפה). y ערך רגולרי של f

וגם של $f|_{\partial M}$.

אזי $f^{-1}(y)$ היא יריעה חלקה <u>עם שפה</u> ממימד $m-n$ ו-:

$$\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y)\cap \partial M$$

וגם:

$$T_x f^{-1}(y) = \ker D_x f \subset T_x M$$

משפט SARD:

נקודות הקריטיות של f או של $f|_{\partial M}$ בעלות <u>מידה אפס</u>.

משפט: (no restriction theorem)

M קומפקטית עם שפה $\partial M\neq\emptyset$.

לא קיימת <u>פ' חלקה</u>: $f:M\to\partial M$ שהיא הזהות על השפה.

הוכחה:

נניח שקיימת פ' כזאת, SARD $\Leftarrow$ קיים ערך רגולרי $y\in\partial M$

y ערך רגולרי גם של $f|_{\partial M}=Id_{\partial M}$.

ע"פ RVT* $\Leftarrow$ $f^{-1}(y)$ יריעה קומפקטית (סגורה בקומפקט) עם שפה ממימד 1.

$$\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y)\cap\partial M = \{y\}$$

(כי $f|_{\partial M} = 1_{\partial M}$).

המסקנה נובעת ממשפט המיון של יריעות חד מימדיות.

משפט (הגרסה החלקה של משפט נק' השבת של Brouwer)

לכל העתקה חלקה מהכדור הסגור לעצמו יש נקודת שבת.

הוכחה:

נניח בשלילה שיש f כנ"ל (בלי נק' שבת). נגדיר:

$$g(x): D^n \xrightarrow{\text{הכדור הסגור}} S^{n-1}$$

$g(x) =$ נק' החיתוך של הספרה והישר $[x, f(x)]$ (הקרובה יותר ל- x מאשר ל- $f(x)$)

g חלקה (תרגיל) וקבועה על $\partial D^n = S^{n-1}$

בסתירה למשפט הקודם.

משפט (הגרסה הרציפה של המשפט הקודם)

B הומאומורפי ל- D^n ו- $f: B \to B$ רציפה

אזי ל- f יש נק' שבת.

הוכחה:

1) מספיק להוכיח עבור D^n (להשתכנע).

2) D^n קומפקטי $\overset{\text{Stone-Wierstrass}}{\Longrightarrow}$ נקרב את f ע"י פולינומים

$p: D^n \to \mathbb{R}^n$ כך ש- $\forall x \in D^n \ \|f(x) - p(x)\| < \varepsilon$

נגדיר $F(x) = \frac{1}{1+\varepsilon} p(x)$ $F: D^n \to D^n$ חלקה.

$$\|F(x)\| \le \frac{1}{1+\varepsilon}\left(\|f(x)\| + \|p(x) - f(x)\|\right) \le 1$$

בנוסף: $\|F(x) - f(x)\| \le \dots \le 2\varepsilon$

אם ל- f אין נק' שבת,

$$\mu = \inf_{x \in D^n} \|f(x) - x\| > 0$$

(f רציפה). ניקח $\varepsilon = \mu/2$. עבור הבחירה הנ"ל נקבל:

אז $\|F(x) - x\| \ge \|f(x) - x\| - \|f(x) - F(x)\| > \mu - 2\varepsilon$

$\Longleftarrow$ F אין נק' שבת סתירה.

סיכום תוצאות על יריעות עם שפה (תרגולים)

① הגדרה + ∂M יריעה (חלקה) ממימד $n-1$.

② T_pM ו- TM

③ אוריינטציה + פ' חלקות.

④ $f: H^n \to M$ חלקה, $p \in \partial H$. אזי u סביבה פתוחה של p ב- $\mathbb{R}^n$ ו- $\tilde{f}: U \to M$ חלקה כך ש- $\tilde{f} = f$ on $V \cap H^n$

$\Longleftarrow$ $d\tilde{f}_p = df_p$

⑤ M יריעה, $f: M \to \mathbb{R}$ חלקה, 0 ערך רגולרי.

$\Longleftarrow$ $f^{-1}([0,\infty))$ יריעה חלקה ממימד n כך ש- $\partial f^{-1}([0,\infty)) = f^{-1}(0)$

(רמז constant rank theorem)

סקיצת הוכחה של RVT ליריעות עם שפה.

1) מספיק להסתכל על $p \in f^{-1}(q) \cap \partial M$ (אחרת נשתמש ב-RVT הרגיל)

2) מספיק להניח ש- $M = H^n$

3) מחלקות $\Longleftarrow$ יש סביבה פתוחה V ב- $\mathbb{R}^n$ של p ו- $\tilde{f}: V \to N$ חלקה מ- ש- $\tilde{f} = f$ על $V \cap H^n$.

4*) נחליף את V בסביבה יותר קטנה (גם נסמן אז V) כך שפה - $\tilde{f}$ אין נק' קריטיות שם.

(אפשר אז שימוש בעובדה ש- rank lower-semi-cont.)

q ערך רגולרי של $\tilde{f}$ $\Longleftarrow$ $\tilde{f}^{-1}(q)$ יריעה חלקה

(תת יריעה של V)

נגדיר: $\pi: \tilde{f}^{-1}(q) \to \mathbb{R}$

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_n$

$$f^{-1}(q) \cap V = \tilde{f}^{-1}(y) \cap \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \tilde{f}^{-1}(y) \mid \pi(x) \geq 0\}$$

יריעה חלקה עם שפה $\pi^{-1}(0)$ (תרגיל 5).

ולכן $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M$

Scanned by CamScanner

משפט (משפט ספירת התקלויות):

$f: X \to Y$ חלקה. X קומפקטית ו- $\dim X = \dim Y$

ו- y ערך רגולרי.

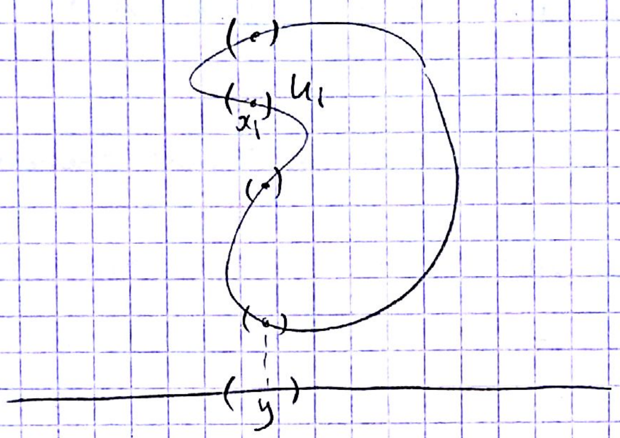
אזי, $f^{-1}(y)$ קבוצה סופית $(x_1, \dots, x_n)$

וכן קיימות סביבות פתוחות U_i של x_i ו- V של y.

כך ש- $U_i \cap U_j = \phi$ $i \neq j$.

כך ש- $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$

$f|_{U_i}: U_i \to V$ דיפאומורפיזם



הוכחה:

קומפקטיות + RVT $\Longrightarrow$ $\#f^{-1}(y) < \infty$

f דיפאומורפיזם לוקאלי $\Longrightarrow$ $\exists V_i'$ near y, $\exists U_i'$ near x_i

כך ש- $f: U_i' \to V_i'$ דיפאומורפיזם.

אפשר לדאוג ש- $U_i' \cap U_j' = \phi$ $i \neq j$ (מספר סופי של נקודות)

נגדיר $V' = \bigcap_{i=1}^{n} V_i'$, נגדיר $U_i'' = U_i' \cap f^{-1}(V')$

$f: U_i'' \to V$ דיפאומורפיזם.

$Z := f(X \setminus \bigcup U_i'')$

$V = V' \setminus Z$

$U_i = U_i'' \cap f^{-1}(V)$

<u>מסקנה:</u> (תרגיל)

באותם תנאים כמו במשפט דרגת התקלוטים,
הפונקציה $\#f^{-1}(y)$ - locally constant. יש סביבה U
של y ב- Y כך ש- $\#f^{-1}(y') = \#f^{-1}(y)$ $\forall y' \in U$.

4) לכל פולינום <u>מרוכב</u> לא קבוע יש שורש. $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

<u>הוכחה:</u> (הסבר של Milnor)

$$\pi_+ : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

נגדיר $f: S^2 \longrightarrow S^2$

$$\begin{cases} f(0,0,1) = (0,0,1) \\ f(p) := \pi_+^{-1} \circ p \circ \pi_+(p) \end{cases}$$

$$\pi_- : S^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

U סביבה קטנה של הראשית ב $\mathbb{R}^2$.

ונגדיר: $Q(z) = \pi_- \circ f \circ \pi_-^{-1}(z)$

$$Q : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

<u>הערה:</u>

Q מוגדרת היטב + חלקה בסביבת הראשית $\longrightarrow$
$\Longleftarrow$ f חלקה ליד $(0,0,1)$.

אם U מאוד קטן $\Longleftarrow$ $f \circ \pi_-^{-1}(z) \neq f \circ \pi_-^{-1}(0) = (0,0,1)$
בפרט, הוא לא $(0,0,-1)$ והפונקציה (Q) מוגדרת היטב,

תרגיל: $\pi_+ \circ \pi_-^{-1}(z) = \frac{z}{\|z\|^2} = \frac{1}{\bar{z}}$

נניח $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, $a_n \neq 0$

$$Q(z) = \pi_- \circ \pi_+^{-1} \circ p \circ \pi_+ \circ \pi_-^{-1}(z) =$$

$$= (\pi_+ \circ \pi_-^{-1})^{-1} \circ p\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{\overline{p\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}} = \frac{z^n}{\sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i z^{n-i}}$$

תרגיל

ולכן חלקה בסביבות הראשית (כיוון שלנגזרת השלילה אין שורשים).

$\Longleftarrow$ f חלקה ב- $(0,0,1)$

<u>מתי df_p סינגולרי?</u>

כאשר $\pi_+(p)$ הוא שורש של ?

$$p'(z)=\sum_{i=1}^{n} a_i\, i\, z^{i-1}$$

להשתכנע (רמז) ? $\longleftarrow$

$dp_z(\omega)=p'(z)\omega$ ← תרגיל.