31/10/2016

<u>הרצאה 1</u>

- ירון אוסטרובר
- שרייבר 328
- ostrover@...
- שעות קבלה - יום ג' 9
- יש אתר - ostrover ... (יש רשימה של ספרים).
- כנראה - עבודות בית

o

נושא: יריעות חלקות (smooth) differentiable manifolds

הכללה של משטחים ב- $\mathbb{R}^3$. חלקות - מאפשרת לגזור (מסדר 1) ולבצע אינטגרציה.

נגזרת של תבנית דיפרנציאלית — תבנית דיפרנציאלית

משפט סטוקס: $$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

יריעה חלקה (ואוריינטציה). — שפה של M

o

<u>הגדרה:</u>

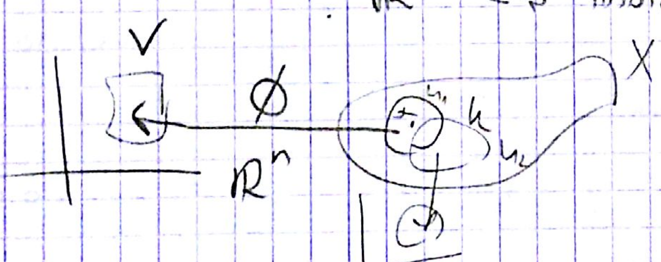
מרחב טופולוגי X נקרא יריעה טופולוגית ממימד n אם:
(כל קבוצה קומפקטית - סגורה).

1) X האוסדורף - כל נקודה אפשר להפריד ע' קבוצות פתוחות

2) X בן-מניה 2 - (אין יותר מדי קבוצות פתוחות)

3) X אוקלידי מקומי - אם מסתכלים על X מקרוב אז לכל נקודה יש סביבה שהיא הומאומורפית לקבוצה פתוחה בתוך $\mathbb{R}^n$

פורמלית - לכל נק' $x\in X$ קיימת סביבה $x\in U$ והומאומורפיזם ϕ כך ש- $\phi(U)\equiv V$ פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$.



<u>הערות:</u>

1) הזוג (U,ϕ) (או השלשה (U,V,ϕ)) נקראים מפה בסביבת הנק' x.

2) אוסף של מפות שמכסה את X נקרא אטלס.

3) לפונקציה x^i המוגדרת ע"י: $\phi(a) = (x^1(a),\dots,x^n(a))$ נקראים קואורדינטות מקומיות סביב הנק' x.

4) בהינתן 2 מפות (קבוצות חיתוך לא ריק) (U,ϕ) ו- (V,ψ). העתקה:

$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto (y_1(x_1,\dots,x_n),\dots,y_n(x_1,\dots,x_n))$$

הנתונה ע"י $\psi\circ\phi^{-1}$ קוראים העתקת מעבר.

5) חושב המימד מוגדר היטב. (יש טענה שהומאומורפיזם בין קבוצות פתוחות שומרת מימד).

(באופן כללי - שמר בטופולוגיה אלגברית)

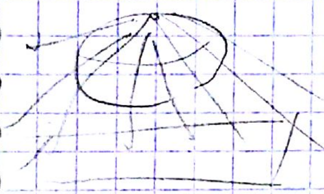
6) תכונות 1), 2) יבטיחו לנו קיום של "חלוקת יחידה" + X קומפקטי מקומית, X פרה קומפקטי, X מטריזבלי, X נורמלי.

דוגמאות:

1) $\mathbb{R}^n$ טופולוגיה סטנדרטית, $U = \mathbb{R}^n$, $\Phi = Id$

2) $S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (+ טופולוגיה מושרית)

$$\left.\begin{array}{l} U_+ = S^n \setminus \{(0,\dots,0,-1)\} \\ U_- = S^n \setminus \{(0,\dots,0,+1)\} \end{array}\right\}$$



$\Phi_\pm (x_1,\dots,x_{n+1}) = \frac{1}{1 \pm x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n) \leftarrow$ רציפות + הפיכות

$\Phi_\pm^{-1} (y_1,\dots,y_n) = \frac{1}{1+y_1^2+\dots+y_n^2} (2y_1,\dots,2y_n, \pm 1-(y_1)^2-\dots-(y_n)^2)$

השערה:

האם ייתכן שיש מרחב טופולוגי X שהוא הומוטופי ל- S^n אבל לא הומאומורפי ל- S^n? לא יתכן.

3) מכפלה של יריעות טופולוגיות. $X \times Y$ (X ו- Y יריעות טופולוגיות)

בפרט: $\mathbb{T}^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ פעמים}}$ - יריעה טופולוגית.

4) גרף של פונקציה רציפה $\Gamma(f) = \{ (x,y) \mid x \in U, y = f(x) \} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה.

מפה גלובלית 1:

$\phi, (\Gamma(f), U) : \quad \phi(x,y) = x$, $\phi^{-1}(x) = (x, f(x))$

רציפה.

(ה) $\mathbb{R}P^n$ אוסף הישרים ב- $\mathbb{R}^{n+1}$ העוברים דרך הראשית.

טופולוגיה: ⟵ $d(l_1,l_2) := \measuredangle(l_1,l_2)$

דרך שקולה לחשוב על $\mathbb{R}P^n$:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

$$\cancel{(x_1,\dots,x_{n+1}) \sim (y_1,\dots,y_{n+1})}$$

$$t\neq 0. \quad (x_1,\dots,x_{n+1}) \sim (tx_1,\dots,tx_{n+1})$$

$$U_i = \{[x_1:\dots:x_{n+1}] \mid x_i \neq 0\}$$

המחלקה שקילות המתאימה

$$\phi_i([x_1:\dots:x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

$$\phi_i^{-1}((y_1,\dots,y_n)) = [y_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1},\dots,y_n]$$

(צריך להשתכנע - רציפה, ϕ^{-1} הפוכה של ϕ)

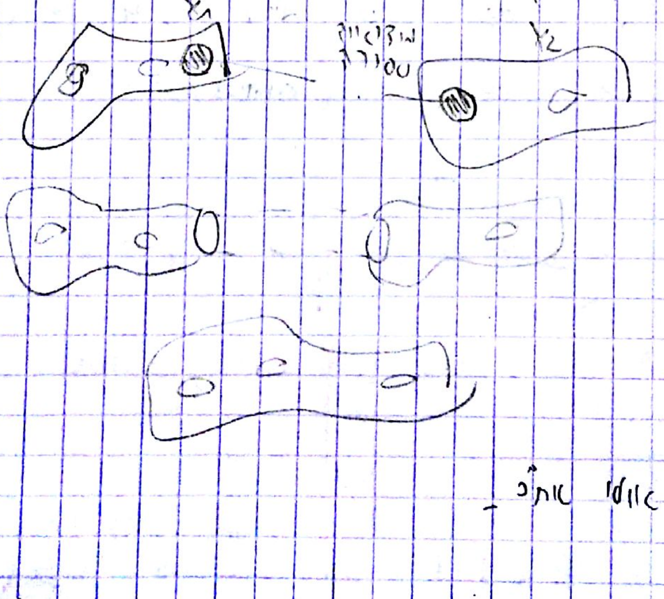
לא דוגמאות: ∞ (דף תרגיל מס 1)

עוד דוגמאות: $D^2 = \{x\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\le 1\}$ - (יריעה עם שפה)

דרכים כלליות לייצר יריעות:

- אפשר להדביק יריעות טופולוגיות עם שפה -

connected sum ("סכום השור") $X_1 \# X_2$



ומדביקים:

באופן יותר פורמלי: - אולי אח"כ