14/11/08

אלגוריתמים - שיעור 2

המשך הניתוח של BFS

כזכור, סימנו ב-$\delta(s,u)$ את האורך בקשתות של המק"ב מ-s ל-u.
ראינו שמתקיים:

1) אם (u,v) קשת אז $\delta(s,v) \le \delta(s,u) + 1$

2) אם (u,v) הקשת האחרונה במק"ב מ-s ל-u אז $\delta(s,v) = \delta(s,u) + 1$.

<u>טענה:</u> אם u נגיש מ-s, האלג' מבקר ב-u, ולהיפך.

<u>הוכחה:</u> באינדוקציה על $k = \delta(s,u)$. אם $k=0$ אז $s=u$ והטענה ברורה.
אם הטענה נכונה ל-$k-1$ ו-u מקיים $\delta(s,u)=k$, כאשר w הקודם ל-u במק"ב מ-s ל-u. לפי הנחת האינדוקציה האלג' מבקר ב-w, ולכן הוא עובר על כל שכניו, לרבות u. מש"ל.

<u>טענה:</u> בכל רגע, בתור Q נמצאים צמתים לכל היותר 2 ערכי d עוקבים, והם בסדר d עולה (כלומר, אם נסתכל על התור ברגע מסוים ונשאל מה ערך ה-d של כל איבר, ייתכן שנקבל 3,3,3,4,4, אך לא 3,3,3,4,5).

<u>הוכחה:</u> באינדוקציה על צעדי האלגוריתם. בהתחלה Q מכיל רק את s עם ערך $d=0$. נניח כי הטענה נכונה עד רגע מסוים.

Q:	v_1	v_2	...	...	...	...	v_m
d:	j	j	...	j	$j+1$	...	$j+1$

האלגוריתם מוציא את v_1 מהתור, עובר על כל שכניו, ונותן לחדשים ("לבנים") מביניהם ערך $d:=j+1$ ושם אותם בסוף התור, ולכן התכונה נשמרת. מש"ל.

<u>משפט:</u> לכל צומת u, $d[u] = \delta(s,u)$ (כלומר, האלגוריתם <u>נכון</u>.)
וזה נכון גם אם $\delta(s,u)=\infty$.

<u>הוכחה:</u> $d[u]=\infty$ בסיום $\Leftrightarrow$ האלג' לא ביקר ב-u $\Leftrightarrow$ u לא נגיש מ-s $\Leftrightarrow$ $\delta(s,u)=\infty$.

עבור המקרה $\delta(s,u)<\infty$ נוכיח באינדוקציה על $k=\delta(s,u)$. אם $k=0$ אז $u=s$, $d[s]=0$ באתחול וגם $\delta(s,s)=0$, ולכן הטענה נכונה.
נניח נכונות עבור $k-1$ ויהא u צומת במרחק k מ-s.
יהא w צומת אחרון (מלבד u) במק"ב מ-s ל-u, כמו קודם,

מתקיים $\delta(s,w)=k-1$, ולכן לפי הנחת האינדוקציה האלג' ביקר ב-w ושם $d[w] \leftarrow k-1$.

מהלמה על Q נובע שהאלג' מבקר בצמתים לפי סדר d עולה, ולכן מספיק שנראה ש-$d[u]$ גדול מ-$d[w]$. מזה ינבע ש-u עדיין לא בתור כש-w מוכנס לתור. ~~לכן u יהיה שכן חדש של w כש-w יגיע לראש התור, ואז האלג' ישים~~ ~~$d[u] \leftarrow d[w]+1 (=k)$~~

כל עוד w בתור יש בתור אחרי w רק ערכי-d שהם k או k-1.

אם u אחד מהם אז ערך $d[u] = k$ והוכחנו. אם לא, כש-w מגיע לראש התור u לא בתור, לכן u שכן חדש של w, והאלג' ישים בו:

$d[u] \leftarrow d[w] + 1 \ (= k)$

<u>טענת עזר</u>: לכל u, $d[u] \geq \delta(s,u)$. גם את טענה זו ניתן להוכיח באינדוקציה.

ולכן,

$$d[u] \geq \delta(s,u) = k > k-1 = \delta(s,w) = d[w]$$

ומכאן נובע המשפט. מש"ל.

שימושים של BFS

BFS עונה על שאלות של נגישות מ-s (למשל: האם צומת u נגיש מצומת s?); מציאת כל הצמתים הנגישים מ-s; מציאת מרחק של כל צומת מ-s; מציאת המק"בים מ-s לכל צומת נגיש.

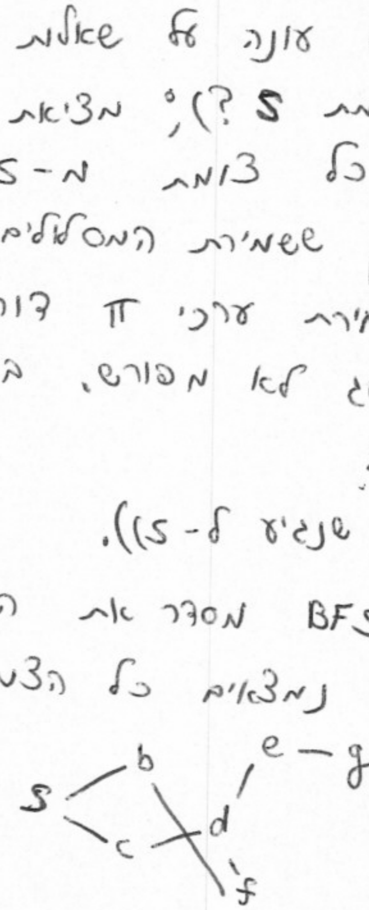
(נציין ששמירת המסלולים באופן מפורש יכולה לקחת $\Theta(|V|^2)$ זיכרון, בעוד ששמירת ערכי π דורשת רק $\Theta(|V|)$ זיכרון. זהו "<u>ייצוג סתום</u>", כלומר ייצוג לא מפורש. בכדי למצוא מק"ב מ-s ל-u, נלך בעקבות מצביעי π:

$v_1 \leftarrow u, \quad v_2 \leftarrow \pi(v_1), \quad v_3 \leftarrow \pi(v_2), \ldots$

(עד שנגיע ל-s)).

ה-BFS מסדר את הצמתים הנגישים מ-s בשכבות (layers), בשכבה ה-j נמצאים כל הצמתים עם $d[\cdot]=j$.

0	1	2	3
s	b, c	d, e, f	g



אם הגרף מכוון, כל קשת שאינה "בסיסית" (= קשת ש-BFS השתמש בה לבניית d) מחברת צומת בשכבה j כלשהי לצומת בשכבה $i \leq j+1$.

אם הגרף לא מכוון, כל קשת מחברת צמתים באותה שכבה או בשכבות סמוכות.

<u>הערה</u>: מצביעי π מהווים למעשה עץ מכוון ששורשו s, שנקרא לו עץ המק"בים. מק"ב לצומת u בעץ הוא המסלול מהשורש ל-u. עם זאת, לא כל המק"בים מתקבלים בדרך זו.

אפשר היה לייצג את כל המק"בים ע"י כך שכל צומת בשכבה j כלשהי יצביע על כל הצמתים בשכבה $j-1$ שיש קשת מהם אליו.

שימוש נוסף ומפתיע ל-BFS הוא פתרון לבעיה הבאה:

נתון גרף לא מכוון G, לקבוע האם G הוא דו-צדדי, ואם כן למצוא פירוק מתאים של V.

<u>טענה</u>: גרף לא מכוון הוא דו-צדדי $\Longleftrightarrow$ אין בו מעגל באורך אי-זוגי.

<u>הוכחה</u>: $\Leftarrow$) אם G הוא דו-צדדי, כל קשת מעבירה אותנו מ-V_1 ל-V_2 או להיפך. לכן כדי לחזור לאותו צומת צריך מספר זוגי של קשתות.

$\Rightarrow$) נוכל להניח ש-G קשיר (אחרת, ניתן להפעיל את הטיעון הבא על כל רכיב קשירות בנפרד. אם קיים פירוק לכל רכיב קשירות, קל לבנות פירוק לגרף כולו, ולכן הגרף כולו דו-צדדי).

ניקח צומת s כלשהו, ונריץ BFS ממנו. נקבל את כל הצמתים מסודרים בשכבות, ונטען ש<u>אין</u> קשתות שמחברות 2 צמתים באותה שכבה, כי מקשת כזאת נקבל מעגל אי-זוגי: מק"ב מ-s לאחת מקצוות הקשת, הקשת עצמה, ומק"ב מהקצה השני ל-s. שני המק"בים באותו אורך (שהוא מספר השכבה) ולכן מעגל זה אכן באורך אי-זוגי.

לכן כל הקשתות מחברות שכבות סמוכות, ונוכל להגדיר: V_1 הם כל הצמתים בשכבות הזוגיות (כולל s), ו-V_2 הם כל הצמתים בשכבות האי-זוגיות.

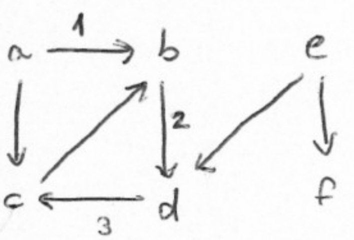
כעת גם ברור איך משתמשים ב-BFS כדי להכריע דו-צדדיות. בכל פעם שאנו נתקלים בסריקת הגרף בצומת "ישן", נבדוק האם הקשת מחברת שני צמתים מאותה שכבה. אם כן, הגרף לא דו-צדדי. אחרת, הפירוק המבוקש הוא פירוק לפי זוגיות השכבות.

חיפוש לעומק - DFS (Depth-First Search)

DFS מבקר בכל צמתי הגרף.
הרוטינה הראשית DFS מנהלת את החיפוש ע"י כך שהיא בוחרת כל פעם צומת התחלה s חדש שעדיין לא ביקרנו בו ומתחילה ממנו חיפוש חדש.
DFS-VISIT היא רקורסיבית ומבצעת חיפוש בניסיון להגיע לכל מה שנגיש מצומת ההתחלה הנוכחי s שעדיין לא בקרנו בו.
בכל צומת u נשמר צבע: לבן (טרם נתקלנו ב-u), אפור (נתקלנו ב-u אך טרם סיימנו), שחור (סיימנו לבקר ב-u).
time הוא מונה שבכל פעימה שלו אנו נתקלים בצומת חדש או מסיימים טיפול בצומת.
d[u] - לא קשור ל-d מ-BFS! הזמן בו גילינו את u לראשונה.
f[u] - הזמן בו סיימנו את הטיפול ב-u.
π[u] - הצומת הקודם שגילה את u.

DFS משתמש ברשימה של הצמתים, ללא אף הנחה על סדר הצמתים ברשימה. הקלט G הוא גרף מכוון או לא, נתון ע"י רשימות שכנות.

<u>דוגמת ריצה:</u>



לשים לב: כש-a מציץ ב-c, הוא כבר שחור.

מצביעי π יוצרים אוסף של עצים (יער) מכוונים לכיוון השורש

	d[]	f[]
a	1	8
b	2	7
c	4	5
d	3	6
e	9	12
f	10	11

עקרון הקינון (nesting)

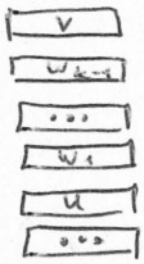
לכל צומת u מתאים אינטרוול זמן בו u פעיל d[u]..f[u].
לכל שני צמתים u,v יש שני אינטרוולים זרים, או שהאינטרוולים שלהם מקוננים זה בזה. אם הם מקוננים, הצומת עם האינטרוול הקטן הוא צאצא של הצומת האחר ביער ה-DFS.

<u>הוכחה/הסבר:</u> נוח לחשוב על הרקורסיה כמתנהלת ע"י מחסנית. בזמן d[u] מכניסים את u למחסנית ובזמן f[u] מוציאים אותו.
אם π[v]←u, זה קורה בזמן קריאה רקורסיבית ש-u קורא ל-v.
כלומר מצביעי π הם מצומת גבוה במחסנית לצומת מתחתיו.
לכן לא ייתכן מעגל המורכב ממצביעי π, לכן π מגדיר גרף מכוון חסר מעגלים בו לכל צומת דרגת יציאה 1, וזה <u>יער מכוון</u>.

נניח שהאינטרוולים אינם זרים. בה"כ נניח: $d(u) < d(v) < f(u)$

נראה שאז $f(v) < f(u)$. ההנחה שקולה לאמירה: v מתגלה אחרי ש-u התגלה אבל לפני ש-u מסתיים. לכן כש-v התגלה, u במחסנית ו-v נכנס לראש המחסנית, מעל u. לכן v יוצא מהמחסנית לפני u, כלומר $f(v) < f(u)$ כנדרש.

במקרה המקונן v נמצא במחסנית מעל u ומבנה המחסנית ברגע זה:



כלומר מצביעי π הם:

$$v \to w_{k-1} \to \dots \to w_1 \to u$$

כלומר, v צאצא של u, או במילים אחרות:
u אב קדמון של v.

סיווג קשתות הגרף ע"י DFS

ה-DFS עובר על כל קשתות הגרף. בחלק מהן הוא משתמש להגדרת π ובניית עץ ה-DFS, ובשאר לא. נקרא להן "קשתות עץ" (באלה שבהן ה-DFS משתמש). לקשת שמחברת אב קדמון לצאצא נקרא "קשת קדמית", לקשת שמחברת צאצא לאב ישיר או קדמון נקרא "קשת אחורית", ולקשת שלא מחברת צאצא ואב קדמון נקרא "קשת חוצה".

נניח ש-G מכוון. נסתכל על (u,v) ברגע שבו u בודק אותה.

1) אם v לבן זו קשת עץ.
2) אם v אפור זו קשת אחורית.
3) אם v שחור זו קשת קדמית או חוצה.

אם $f(v) < d(u)$ האינטרוולים זרים, ולכן הקשת חוצה. יותר מזאת, הקשת היא מצומת "מאוחר" יותר לצומת "מוקדם" יותר.
אם $d(u) < f(v)$ האינטרוולים מקוננים, לכן v צאצא של u, והקשת קדמית.

הסבר ל-(2): ברגע זה v כבר התגלה אך לא הסתיים. לכן u בראש המחסנית ו-v איפשהו מתחתיו, ולכן u צאצא של v.