4/11/08

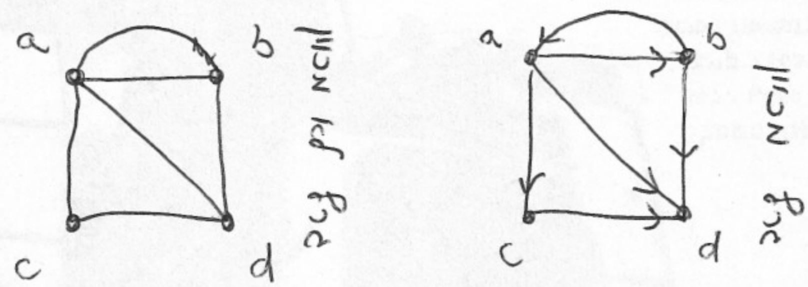
אלגוריתמים - שיעור 1

* ניתן למצוא באינטרנט סרטי וידאו של ההרצאות מסמסטר קודם.
* כדאי להביא את חוברת הקורס לכל הרצאה.
* הבחינה דומה לתרגילים: למצוא אלגוריתמים יעילים לביצוע משימות, תוך שימוש באלגוריתמים שלמדנו בכיתה, ולהוכיח את יעילותם. המבחן עשוי בכל זאת לכלול שאלות הבנה.
* שמו הקודם של הקורס: "יעילות של חישובים".
* ספר הקורס: קורמן (אותו ספר ששימש אותנו ב"מבני נתונים").

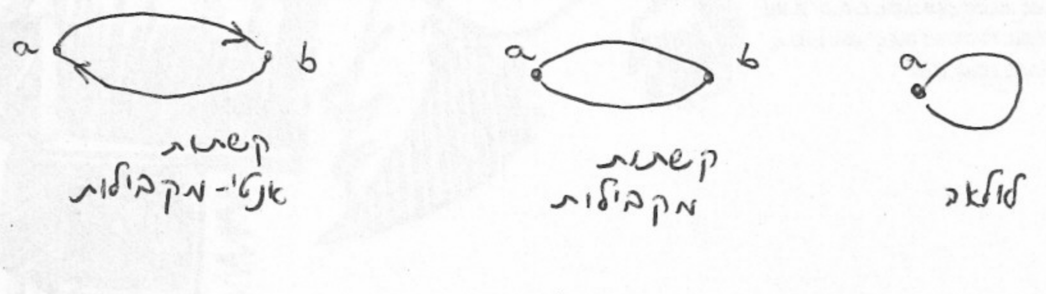
גרפים

גרף הוא זוג $G=(V,E)$ כאשר V היא קבוצה של קודקודים/צמתים, ו-E היא קבוצה של קשתות: קשת (u,v) היא זוג של צמתים.

בגרף מכוון הקשתות הן זוגות סדורים, או בניסוח אינטואיטיבי: לקשתות יש כיוון. בגרף לא מכוון הקשתות הן זוגות לא סדורים, כלומר לקשתות אין כיוון.



לולאה היא קשת מצומת לעצמו. ייתכן שיש יותר מקשת אחת בין שני צמתים, ואז הן נקראות קשתות מקבילות. קשתות שנבדלות רק בכיוון נקראות אנטי-מקבילות.



גרף ללא לולאות וללא קשתות מקבילות נקרא גרף פשוט.

אם (a,b) קשת, אזי a,b נקראים נקודות הקצה שלה, וכן שכנים זה של זה.

קשתות ייקראו סמוכות אם יש להן נקודת קצה משותפת.
בגרף מכוון, דרגת היציאה של צומת u היא מספר הקשתות היוצאות מ-u. באופן דומה מגדירים דרגת כניסה.

דרגת u היא מספר הקשתות שנכנסות או יוצאות מ-u (בגרף לא מכוון יש רק דרגה).

קודקוד עם דרגה 0 נקרא מבודד. אם הגרף מכוון ודרגת הכניסה היא 0 אז הצומת הוא מקור. אם דרגת היציאה היא 0, הצומת הוא בור (sink).

תת-גרף הוא גרף $G'=(V',E')$ כך ש- $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$, $E'\subseteq V'\times V'$.

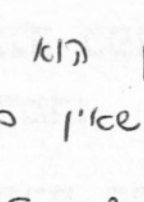
תת-גרף מושרה (induced) הוא כזה שכולל את כל הקשתות ב-E שמחברות צמתים ב-V'.

מסלול/מסילה הוא סדרה של צמתים $v_1, v_2, \ldots, v_k$ כך שלכל i קיימת קשת (v_i, v_{i+1}). אורך המסלול היא מספר הקשתות שבו (מסלול שאין בו קשתות נקרא מסלול ריק).

מעגל הוא מסלול שבו הקודקוד הראשון הוא הקודקוד האחרון, ואורכו לפחות 1.
מסלול פשוט/מעגל פשוט הוא כזה שאין בו חזרה של צמתים.

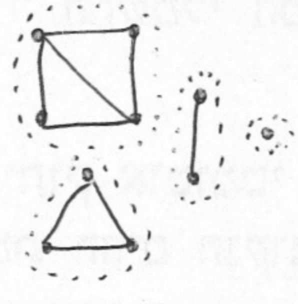
בגרף לא מכוון, קליק הוא תת-קבוצה של צמתים שכל שניים מהם מחוברים בקשת. גרף שלם K_n הוא גרף בן n צמתים שבו כל שני צמתים מחוברים בקשת (הכוונה לגרף לא מכוון). קבוצה של צמתים תקרא בלתי תלויה אם אין שני צמתים בקבוצה שמחוברים בקשת.

גרף דו צדדי הוא גרף שקבוצת הצמתים שלו היא איחוד זר של שתי תת-קבוצות שכל אחת מהן בלתי תלויה.



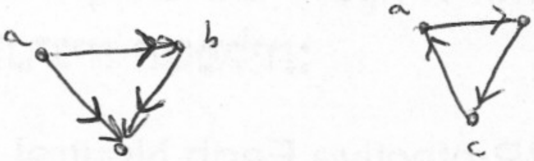
גרף דו-צדדי

צומת u נגיש מצומת v, אם קיים מסלול מ-v ל-u. כל צומת נגיש מעצמו.
גרף לא מכוון נקרא <u>קשיר</u> אם כל צומת נגיש מכל צומת.
תת-קבוצה של קודקודים תקרא <u>רכיב קשירות</u> אם היא תת-קבוצה <u>מקסימלית</u> של
צמתים כך שתת-הגרף המושרה שהיא מגדירה הוא קשיר.



גרף עם 4
רכיבי קשירות

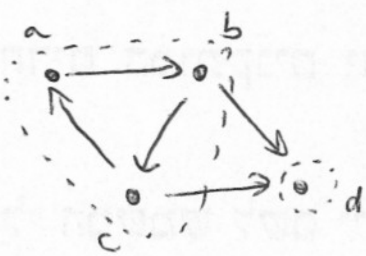
במילים אחרות, רכיב קשירות הוא תת-גרף קשיר <u>מקסימלי</u>.
כל גרף מתפרק לרכיבי קשירות זרים בצמתים ובקשתות.
הגרף מכוון נאמר שהוא <u>קשיר חזק</u> אם כל צומת נגיש מכל צומת ע"י מסלול מכוון.



גרף מכוון
לא קשיר חזק

גרף קשיר חזק

בגרף מכוון, <u>רכיב קשירות חזקה</u> הוא קבוצה <u>מקסימלית</u> של צמתים שהתת-גרף שהם משרה קשיר חזק.



גרף מכוון מחולק לרכיבי קשירות חזקה.

גם פירוק של גרף מכוון לרכיבי קשירות חזקה הוא פירוק לקבוצות זרות בקודקודים ובקשתות, אך יכולה להיות קשת בין צמתים מרכיבי קשירות חזקה שונים.
<u>גרף אציקלי מכוון</u> הוא גרף מכוון חסר מעגלים.

עצים

גרף לא מכוון, חסר מעגלים וקשיר הוא <u>עץ</u>. גרף לא מכוון חסר מעגלים הוא <u>יער</u> וכל רכיב קשירות שלו הוא עץ.

צומת בעץ/יער עם דרגה 1 נקרא <u>עלה</u>.

יער (העלים מסומנים)

בעץ עם n קודקודים יש בדיוק $n-1$ קשתות.

<u>הוכחה באינדוקציה על n</u>: עבור $n=2$ הנכונות ברורה. אם הטענה נכונה עבור $n-1$ צמתים ונתון עץ T עם n צמתים, ניקח עלה v ונמחק אותו ואת הקשת היחידה שסמוכה לו, ונקבל תת-גרף T' עם $n-1$ צמתים, ללא מעגלים וקשיר, כלומר עץ. יש בו $n-1$ צמתים, לפיכך לפי הנחת האינדוקציה $n-2$ קשתות, ולכן ב-T יש $n-1$ קשתות כפי שרצינו להוכיח.

ה"חור" היחיד בהוכחה הוא ההנחה שבכל עץ יש עלה. נראה זאת:

ראינו שלוש תכונות שמאפיינות עץ:
- קשיר
- חסר-מעגלים
- בעל $n-1$ קשתות.

כל שתיים מהתכונות גוררות את השלישית.

<u>עץ מכוון</u> הוא גרף מכוון שנוצר באופן הבא: לוקחים עץ (לא מכוון), בוחרים צומת אחד שייקרא <u>שורש העץ</u>, ומכוונים את הקשתות מהשורש והלאה (או לחילופין לכיוון השורש).

בעץ (לא מכוון) בין כל זוג צמתים קיים מסלול אחד ויחיד.

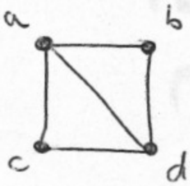
כדאי לקרוא בחוברת את העמוד "טענות בסיסיות" שמציג טענות בסיסיות על גרפים.

ייצוג של גרפים

(שכנות = adjacency)

(1) ע"י רשימות שכנות

(2) ע"י מטריצת שכנות



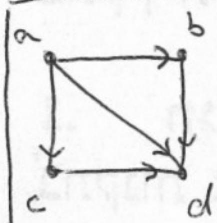
$a \to (b \to c \to d)$

$b \to (a \to d)$

$c \to (a \to d)$

$d \to (a \to b \to c)$

גרף לא מכוון בייצוג (1)



$a \to (b \to c \to d)$

$b \to (d)$

$c \to (d)$

$d \to ()$

גרף מכוון בייצוג (1)

	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	0	0	0	1
c	0	0	0	1
d	0	0	0	0

אותו גרף מכוון בייצוג (2)

בייצוג (1) הצמתים מיוצגים איכשהו ולכל צומת u יש מצביע לרשימה מקושרת של כל שכניו.

ייצוג זה חסכוני במקום, אך הגישה לקשת קונקרטית יקר מבחינת זמן ריצה.

מטריצת שכנות (צורת ייצוג (2)) היא טבלת $|V|$ שורות ו- $|V|$ עמודות, ומקיימת:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{אם קיימת קשת בין צומת } i \text{ ל-} j: \\ 0 & \text{אחרת:} \end{cases}$$

זו שיטה בזבזנית בזיכרון, בעיקר אם הגרף דליל (כלומר, אין בו הרבה קשתות).

חיפוש לרוחב Breadth-First Search

נתון גרף $G=(V,E)$ מכוון או לא וצומת התחלה s. מטרתנו לבקר בצורה יעילה בכל הצמתים הנגישים וגם לחשב, לכל צומת כזה u, את אורך המסלול הקצר ביותר מ-s ל-u.

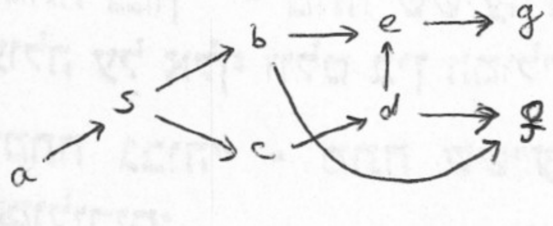
פסאודו-קוד של BFS ניתן למצוא בחוברת. לכל צומת u מחזיקים:

$d[u]$ - האורך הקצר ביותר של מסלול מ-s ל-u שהתגלה עד עתה.

$\pi[u]$ - מצביע לצומת הקודם במסלול הקצר ביותר מ-s ל-u שהתגלה עד עתה.

האלגוריתם משתמש בתור Q. G נתון ע"י רשימות שכנות.

לשם הבנת האלגוריתם, כדאי לדמות ריצה שלו על הגרף משמאל:



Q: s b c e f d g

d: 0 1 1 2 2 2 3

π: s s b b c e

(משמעות הצבעים באלגוריתם: לבן - "עוד לא בחנו את הצומת"; אפור - "התחלנו את בחינת הצומת, אבל הוא עוד לא יצא מהתור"; שחור - "הצומת יצא מהתור וסיימנו את הטיפול בו". למעשה, ההבדל בין אפור לשחור חסר משמעות.)

באמצעות מצביעי π ניתן לשחזר את המסלול הקצר ביותר לכל צומת.
נסמן ב- $\delta(s,v)$ את אורך המסלול הקצר ביותר מ-s ל-v (או ∞ אם אין מסלול מ-s ל-v). נוכיח כי בסיום האלגוריתם, $d[v]=\delta(s,v)$, כלומר נוכיח את נכונות האלגוריתם.

$d[s]=0$ בגלל האתחול, וכן $\delta(s,s)=0$, לכן הטענה נכונה עבור s.

1) אם $(u,v)\in E$ אז $\delta(s,v)\le\delta(s,u)+1$.

2) אם u צומת קודם ל-v במסלול קצר ביותר מ-s ל-v אזי:

$$\delta(s,v)=\delta(s,u)+1$$

נחזור להוכחה זו בשבוע הבא ונסיים אותה.

כעת נתייחס לסיבוכיות: זמן הריצה של האלגוריתם הוא: $O(|V|+|E|)$
(שזו סיבוכיות אופטימלית, כי לביצוע המשימה אנו נדרשים לפחות לקרוא את כל הקלט).

וזאת שאתם מבינים למה זו הסיבוכיות.